代数的なツイスター空間の複素幾何学

本多宣博（東工大）

よく知られているように、向きづけられた 4 次元多様体上のゲージ理論と複素幾何学の間には密接な関連がある。たとえば複素曲面上で反自己双対（ASD) 接続を考えることは、正則ベクトル束を考えることとほぼ同値であり、このことから、滑らかな 4 次元多様体上の ASD 接続は正則ベクトル束の一般化と思うことができる。

これは少々強引な解釈であるが、滑らかな 4 次元多様体が複素構造をもっていない場合でも、特殊な幾何構造（ASD 計量と呼ばれるリーマン計量）をもつときには、反自己双対接続はある 3 次元複素多様体上の、通常の意味での正則ベクトル束を自然に定める。ここに現れる複素多様体は**ツイスター空間**とよばれ、ASD 計量から自然に構成される。こうしたアイデアは、1960 年代から 1970 年代にかけて、Penrose, Ward が提出し、Atiyah-Hitchin-Singer により数学的に整備され、ADHM 対応などの重要な応用がなされた。

このようにツイスター空間は 4 次元多様体上のゲージ理論から生じる 3 次元複素多様体であり、たとえば射影代数的な 3 次元複素多様体とはかなり異なる性質を持つ。実際、ケーラー計量を許すコンパクトツイスター空間は、たった 2 つしか存在しないことが知られている。しかしながら、射影代数的な多様体と双有理同値という意味で代数的な（つまり、射影代数的な多様体にブローアップやブローダウンなどの双有理変換を施して得られる）ツイスター空間は、現在では非常に多く存在することが知られており、しかもそれらは代数幾何における伝統的な方法によりかなり具体的な記述が可能である。本講演では、ツイスター空間の定義と基本的な性質から初めて、代数的なツイスター空間に関する基本的な結果を紹介し、研究の現状をお話ししたい。