極小曲面のガウス写像の除外値に対する **OSSERMAN** 理論の計量化の試み

小林亮一（名古屋大学・大学院多元数理科学研究科）

$\mathbb{R}^3$ 内の完備極小曲面の Gauss 写像の除外値数の最良評価は Picard の定理の類似であり，Picard の定理は本質的に解析的である．この問題は藤本 (1988) によって解かれ，証明は本質的に解析的で，答は外値数 ≤ 4 である．問題の完備極小曲面が有限全曲率をもつという特別な場合（代数的と解析的の "境界" に位置する面白い対象）を考える．このとき，共形構造は compact Riemann surface puntured at finitely many points で，Weierstrass data は有理型に延長することが Huber (1957), Osserman (1964) によって示されている．表題にある Osserman 理論 (1964) とは，この場合に除外値数 ≤ 3 を導く代数幾何と周期条件を組み合わせる理論のことである．本講演では，Osserman 理論に現れるすべての要素を計量化した理論を構築する試みについて報告する．

1. 有限全曲率条件の計量化は，Weierstrass data を普遍被覆面である単位円板に持ち上げ，自由 Fuchs 群の作用を計量的に理解する試みに対応する．講演では，放物型変換の反復合成によって惹き起こされる "局所化現象" について述べる．

2. Osserman 理論で使われる代数幾何的交点理論の計量化は "自由 Fuchs 群作用つき Nevanlinna 理論" の言葉で記述される．講演では，Gauss-Bonnet の定理と Euler 数，Osserman 理論で本質的な $R := \frac{4\pi \deg(g)}{2\pi\chi(M)}$ がどのように計量化できるかを述べる．

3. 1 で述べた局所化現象は，Osserman 定理 $R > 1$ の計量化した設定での類似物を生み出す（ただし，本アプローチではこの段階で周期条件が分離し，周期条件以外の群作用だけの話になる）．この類似物を解析するために 必要な "計量化 Riemann-Hurwitz 定理" について述べる．この類似物の正体は，潜在的に無限個の切頭基本領域の集団に対する "集団 Cohn-Vossen 不等式" と解釈でき，これは Weierstrass data が compact Riemann surface punctured at finitely many points で定義されていさえすれば成り立つ性質である．

4. 有限全曲率の極小曲面を構成するときの最難関は周期条件を解くことである．講演では，周期条件がどのように計量化できるかについて述べる．周期条件の計量化のキーは，周期条件を encode する円板上の正則関数と $\mathbb{P}^1$ の因子の組を構成し，その組に (1 で述べた局所化現象を加味しながら) 双曲面積と同程度の増大度をもつ円板上の有理型関数に対する "effective な対数微分の補題" を適用することである．

5. 最後に，"集団 Cohn-Vossen 不等式" と "計量化された周期条件" を合わせるとどうなるかについて述べる．