モノドロミー保存変形の Weyl 群対称性

山川 大亮

複素射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の有理型接続

$$\nabla = d - A(x)dx, \quad A(x) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}(x))$$

に対し，そのモノドロミー保存変形と呼ばれる特別な変形を考える事ができます．「モノドロミー保存」の言葉通りの意味を説明するのは少し大変なので，ここでは「平坦接続による変形」，すなわち，$\mathbb{P}^1$ とある複素多様体 Δ の直積の上で定義された平坦な有理型接続を $\mathbb{P}^1$ 方向に制限して得られる，$\mathbb{P}^1$ 上の有理型接続の族 $(\nabla_t)_{t\in\Delta}$ を指す事にします．$\nabla_t = d - A(x,t)dx$ と表したとすると，$\mathbb{P}^1 \times \Delta$ における平坦性は $A(x,t)$ に対する Δ 上の非線型微分方程式を導き，これをモノドロミー保存変形の方程式と呼びます．

モノドロミー保存変形の方程式は数理物理を始め様々な分野で現れる事が知られています．特に有名な例は Painlevé 方程式と呼ばれる非線型常微分方程式のクラスです．元々は特殊函数の満たす 2 階線型常微分方程式の非線型化として得られたものですが，後にそのモノドロミー保存性が示されました．

Painlevé 方程式は非常に興味深い性質を持っており，その一つとして岡本により発見されたアファイン Weyl 群の対称性があります．方程式のパラメータの空間にあるアファイン Weyl 群が作用し，その作用は方程式の解から解への変換に持ち上がります．アファイン Weyl 群の背後にある Dynkin 図は Painlevé 方程式の相空間の幾何学的構造から自然に現れる事も知られており，方程式を理解する上で非常に重要な位置を占めています．

ここ最近，Crawley-Boevey や Boalch らの研究により，より一般のモノドロミー保存変形に対しても，その対称性や，相空間の幾何学的構造との関係について理解が広がってきました．談話会では，モノドロミー保存変形の対称性を理解する上で重要な Katz-Deligne-Arinkin の middle convolution と呼ばれる変換や，相空間と中島箙（えびら）多様体との関係等について知られている事，分かってきた事をお話したいと思います．