K-安定性とケーラーアインシュタイン計量の関係について

佐野友二（熊本大学）

（コンパクト）ケーラー多様体 X 上にスカラー曲率が一定なケーラー計量が存在するか，という問題は現在も精力的に研究されている問題の一つです．多様体のケーラー類を第一チャーン類 $c_1(X)$ の定数倍となるように仮定すると，問題はケーラー・アインシュタイン計量の存在問題に帰着されます．$c_1(X)$ が非正の場合には，Aubin，Yau が Monge-Ampère 方程式を解くことで常にケーラー・アインシュタイン計量が存在することを示されていました．しかし $c_1(X)$ が正の場合（この場合の X をファノ多様体と呼ぶ）には，松島の障害や二木不変量の消滅などの障害が存在し，常に存在するとは限りません．現在では，このような標準的なケーラー計量の存在問題は以下の意味で代数幾何学的な条件の下で解かれることが期待されています．

『偏極多様体 (X, L) に対して定スカラー曲率ケーラー計量が $c_1(L)$ の中に存在することと (X, L) が幾何学的不変式論の意味で安定である』

L は X 上の豊富な直線束です．幾何学的不変式論は代数多様体のモジュライ空間を構成する際に用いられる理論の一つです．偏極多様体の安定性にはいくつかの定義が知られていますが，上の予想は『標準的なケーラー計量の存在に対応する偏極多様体の安定性とは何か？』という問題を含んでいます．現時点で最有力候補として期待されているのが K-安定性です．

集中講義では，K-安定性と標準ケーラー計量（特にケーラー・アインシュタイン計量）について現在までで知られていることを整理して紹介する予定です．談話会では，K-安定性とケーラー・アインシュタイン計量がどのように対応するかを示す例として，Tian の alpha 不変量 $\alpha(X)$ との関係について次の結果を紹介します（尾高悠志氏との共同研究）．

『n 次元ファノ多様体 X において，$\alpha(X) > n/(n+1)$ ならば $(X, \mathcal{O}(-K_X))$ は K-安定である』

$\alpha(X)$ は $c_1(X)$ が正の場合の Monge-Ampère 方程式を解くために導入された不変量です．証明は $\alpha(X)$ を log canonical threshold と呼ばれる代数幾何的な不変量に置き換えて行なわれます．この例を通じて微分幾何と代数幾何がどのように対応するかを議論したいと考えています．