曲線・曲面の可積分幾何

井ノ口順一 (山形大学)

Sine-Gordon 方程式 $\phi_{xx} - \phi_{tt} = \sin\phi$ は，厳密解が求められる特別な非線型波動方程式です．1960 年代の理論物理学の研究で，この方程式はとても不思議な性質を持つことが発見されました．ひとつの解 ϕ と定数 $\lambda \neq 0$ に対し

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\tilde{\phi}+\phi}{2}\right) = \lambda \sin\left(\frac{\tilde{\phi}-\phi}{2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\tilde{\phi}-\phi}{2}\right) = \lambda^{-1} \sin\left(\frac{\tilde{\phi}+\phi}{2}\right)$$

という連立偏微分方程式を考えます．この式は $\tilde{\phi}$ という函数の定義式ですが，実は Sine-Gordon 方程式の新たな解になっています．つまり Sine-Gordon 方程式の解がひとつあれば別の解をがみつかるということです．この連立偏微分方程式は実は 19 世紀の微分幾何で，「双曲平面の 3 次元ユークリッド空間への等長はめ込み」の研究過程で発見されており，Bäcklund 変換とよばれていました．その後, KdV 方程式を始めとするソリトン方程式とよばれる非線型波動方程式に対してもこのような「解の変換」が発見されました．現在，無限可積分系とよばれている方程式の多くが，微分幾何に密接に関わることが知られています．

一方，1951 年に出版された Heinz Hopf の論文由来の問題「3 次元ユークリッド空間内の平均曲率一定閉曲面は球面のみか」に対し, Henry Wente は反例を与えました (1987)．Wente は平均曲率一定な輪環面の存在を証明しました．Wente の発見した平均曲率一定輪環面は Pinkall と Sterling により分類されましたが, 分類の過程では，無限可積分系理論における研究手法が使われました．1990 年代から，無限可積分系と微分幾何 (とくに曲線と曲面) の交錯する研究分野が形成され, 可積分幾何 (integrable geometry) という呼び方がされています．集中講義では，3 次元定曲率空間内の平均曲率一定曲面を無限可積分系として捉え，与えられた初期データから，曲面を構成するアルゴリズム (DPW-method) を解説します．大雑把な説明をしておきます．平面上の調和方程式

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$$

の解 (調和函数) は正則函数 $h(z)$ を用いて $f = h + \bar{h}$, (ただし $z = x + yi$) と表すことができます．平均曲率一定曲面の方程式は非線型ですが，ここで説明したような方法の「非線型版」を作ることができます．それが DPW-method とよばれるものです．

談話会では, 現在，可積分幾何で関心をもたれている研究対象の中から，「3次元幾何 (Thurson 幾何）における極小曲面の構成」についてお話しいたします．この内容は Josef Dorfmeister 氏（ミュンヘン工科大学）, 小林真平氏（弘前大学）との共同研究に基づきます．時間が許せば他の話題 (「曲線の差分幾何」など) にも触れたいと思います．