Desingularizing special generic maps

佐伯 修（九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所）

本講演の内容は**高瀬将道**氏（成蹊大学）との共同研究である．

以下，多様体とその間の写像は C^∞ 級であるものとする．n 次元閉多様体 M^n から p 次元ユークリッド空間への，特異点を持った写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^p$ が与えられたとき $(n \geq p \geq 1)$，以下の問題を考える．

問題　$\pi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ を標準的な射影とする $(m > n \geq p \geq 1)$．このとき，はめ込み，もしくは埋め込み $\eta: M^n \to \mathbb{R}^m$ であって，$f = \pi \circ \eta$ となるものが存在するかどうかを決定せよ（下の可換図式参照）．

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^m \arrow[d, "\pi"] \\ M^n \arrow[ur, dashed, "?\exists\eta\text{：非特異}"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

はめ込み（あるいは埋め込み）は特異点を持たない写像であるので，上のようなリフト η は，与えられた特異写像 f の「特異点解消」と考えることができる．

上の問題に対しては，これまで，いくつかの状況で結果が知られている．Haefliger (1960) は，曲面から平面へのジェネリックな写像に対して，それが 3 次元ユークリッド空間へのはめ込みに持ち上がるための必要十分条件を与えた．Burlet-Haab (1985) は，曲面上の Morse 関数が 3 次元ユークリッド空間へのはめ込みに常に持ち上がることを示した．以上は 2 次元多様体上の写像についての結果であるが，それ以外で知られていたのは，ほとんどが同次元の多様体間の特異写像についてであった．

本講演では，特異写像のうち，もっとも基本的な特異点である「定値折り目特異点」のみを持つ写像，いわゆる special generic map を考える．n 次元多様体 M^n から p 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^p$ への C^∞ 級写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^p$ に対して（$n \geq p \geq 1$），M^n の点が**定値折り目特異点**であるとは，その点のまわりの局所座標をうまく選ぶと，f が

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p^2 + x_{p+1}^2 + \cdots + x_n^2)$$

で表されるときをいう．f の特異点がすべて定値折り目特異点のとき，f を **special generic map** と呼ぶ．本講演では，こうした写像の $\mathbb{R}^{n+1}$ への（余次元 1 の）はめ込み，埋め込みリフトの存在について，最近得られた結果を解説する．これは，意外にも，はめ込みに対する Smale–Hirsch 理論，はめ込み・埋め込みのなす空間のトポロジー，位相的はめ込みと可微分はめ込みのなす空間の関係，球面の裏返し，球面の可微分構造，球面の微分同相群，球面への自由群作用等々，微分トポロジーの種々の対象が交錯する大変興味深い結果である．その一端でも紹介できれば幸いである．