正則自己同型群による有界対称領域の一つの特徴付け

児玉 秋雄（金沢大学理工研究域）

複素多様体 M に対して, $\mathrm{Aut}(M)$ を M の正則自己同型群とする. $\mathrm{Aut}(M)$ はコンパクト開位相を入れることにより, M に連続的に作用する位相変換群となるが, 一般的にはリー群構造を持たない.

さて, 今 $\mathbf{C}^n$ 内の領域 D が $\mathbf{C}^n$ に双正則同値である, すなわち D から $\mathbf{C}^n$ の上への双正則写像 $F : D \to \mathbf{C}^n$ が存在すると仮定しよう. このとき, 明らかに $\mathrm{Aut}(D)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ は位相群として同型になる. それでは, この逆は成り立つか？ すなわち, "$\mathbf{C}^n$ 内の領域 D に対して, $\mathrm{Aut}(D)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ が位相群として同型であるならば, D は $\mathbf{C}^n$ に双正則同値であるか？" さらに問題を一般化して,

基本問題: n 次元複素多様体 M, N に対して, それらの正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(M)$ と $\mathrm{Aut}(N)$ が位相群として同型であるならば, M と N は双正則同値であるか？

について考えてみたい．もちろん，M, N に何の条件も付けなければ，この問題の答えは否定的である．実際, "$\mathbf{C}^n$ 内の正則同値でない有界領域 D_1, D_2 で，しかも $\mathrm{Aut}(D_1)$ と $\mathrm{Aut}(D_2)$ はリー群として同型であるようなものが存在する" ことが知られている．しかし，また一方では，多様体 M, N に関する何らかの条件のもとで，この基本問題が肯定的に解決される場合もあることが知られている．そのようなものの一つとして，$\mathbf{C}^n$ 内の単位多重円板 Δ^n の特徴付けがある：

定理 1 (Kodama - Shimizu; Michigan Math. J. 56 (2008)). M を n 次元連結複素多様体で，その正則包として n 次元 Stein 多様体 $\widehat{M}$ を持つものとする．このとき, $\mathrm{Aut}(M)$ が $\mathrm{Aut}(\Delta^n)$ と位相群として同型であるならば, M は Δ^n に双正則同値である.

その後，A. V. Isaev は，我々のとは独立な仮定を満たすような複素多様体 M を考察し，次の結果を得た：

定理 2 (Isaev; J. Geom. Anal. 18 (2008)). M を n 次元連結複素多様体で，M の各点における $\mathrm{Aut}(M)$ の固定部分群はコンパクトであるものとする．このとき, $\mathrm{Aut}(M)$ が $\mathrm{Aut}(\Delta^n)$ と位相群として同型であるならば, M は Δ^n に双正則同値である.

本講演では，上記の定理 2 が，単位多重円板のみならず，一般の有界対称領域の場合に拡張されること (Kodai Math. J. 33 (2010)) について述べる．また，関連する問題についても言及する.