Fuchsian system の regular coordinate と
変形方程式の reduction

原岡喜重（熊本大学）

微分方程式の変形理論は，様々な数学が交流するおもしろい研究テーマと思われます．今回の標題の内容も，共形場理論の AGT 予想に触発されて考え始めたものです．さらに最近 free divisor と変形理論の興味深い関係を学ぶ機会があり，それについても少し触れることができればと思います．以下では標題の内容について，簡単に説明いたします．

$A_1, A_2, \ldots, A_p$ を $n \times n$-行列（成分は x に関しては定数），$t_1, t_2, \ldots, t_p$ を $\mathbb{C}$ 上の相異なる点とする．Fuchs 型の微分方程式系

$$\frac{dY}{dx} = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{x - t_j} \right) Y \tag{F}$$

のモノドロミー保存変形は，Schlesinger 系

$$\frac{\partial A_i}{\partial t_i} = - \sum_{k \neq i} \frac{[A_i, A_k]}{t_i - t_k}, \quad \frac{\partial A_j}{\partial t_i} = \frac{[A_i, A_j]}{t_i - t_j} \quad (j \neq i) \tag{S}$$

で記述される．ただしモノドロミー保存ということから，A_j の固有値（正確に言えば Jordan 標準形）は $t_1, \ldots, t_p$ には依らないので，(S) は (F) のアクセサリー・パラメーター（以下 AP と略記）に対する微分方程式系である．よって変形方程式を調べるには，(S) を AP に対する方程式として書き下すことが必要であり，そのために (F) の AP を具体的に取り出さなくてはならない．

一方 (F) には自然に Poisson 構造が入るので，変形方程式は Hamilton 方程式系で表すことができる．Hamiltonian および正準変数の取り方は神保-三輪-毛織-佐藤の論文で与えられているが，そこで与えられている正準変数の個数は一般に AP の個数を上回る．これをちょうど AP の個数まで減らしたい．

そのための手がかりとして，regular coordinate というものを提案したい．$A_0 = -\sum_{j=1}^{p} A_j$ とおく．$(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ のスペクトル型 $(s(A_0), s(A_1), \ldots, s(A_p))$ により，(F) の AP の個数 α が決まる．α 個の変数 $(u_1, u_2, \ldots, u_\alpha)$ をうまく取って，$A_1, A_2, \ldots, A_p$ のすべての成分が $u_1, \ldots, u_p$ により有理的に書けるとき，この変数を regular coordinate と呼ぶことにする．regular coordinate 自体が正準変数になることは要請しない．異なる 2 つの Fuchs 型方程式系 (F) の変形方程式の関係を述べるというのは基本的な問題である．たとえば 1 つの留数行列のスペクトル型が $(1, 1, n-2)$ から $(2, n-2)$ に変わると，AP の個数は 2 個減る．この状況を regular coordinate に 2 本の代数的関係式を課すことで実現できれば，2 つの変形方程式の未知関数の関係が明示的に記述できることになる．このとき，変形方程式は good reduction を持つ，ということにしよう．

講演においては，regular coordinate の取り方について試行的な結果を延べ，Katz の操作（middle convolution, addition）との関係，good reduction との関係などについてお話ししたいと思う．