

環境変動がある反応拡散方程式の進行波解の存在問題 に関する変分的アプローチについて

倉田 和浩 (首都大学東京・理工学研究科)

本講演では、数理生態学での個体増殖モデルなどにおける（気候などの）環境変化を伴う反応拡散方程式:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x - ct, u(x, t)), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0$$

に対して速度 $c > 0$ を持つ進行波解 $u(x, t) = w(x - ct)$ の存在について扱う。反応項が環境によらない場合で、 $f(u) = u(1 - u)$ の場合は、1930 年代から研究され Fisher-Kolomogorov 方程式とも呼ばれ、 $c \geq 2$ なる任意の速度 c に対して、進行波解 $u(x, t) = w(x - ct)$ で、 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} w(\xi) = 1, \lim_{\xi \rightarrow +\infty} w(\xi) = 0$ なるものが存在し、 $c < 2$ に対しては存在しないことが知られている。2009 年に、H. Berestycki らによって、上記のような環境変化を伴うモデルに対する進行波解の存在、一意性、安定性などが研究された。典型的な例としては、動く座標系 ξ をつかって、区間 $0 < \xi < L$ では、 $f(\xi, u) = u(1 - u)$ であって、 $\xi < 0$ または $\xi > L$ では $f(\xi, u) = -u$ という場合で、状況としては、 $(0, L)$ では環境がよく、その外では環境が悪くて u は 0 になりたがる、という特徴をもつモデルである。元のモデルで言えば、長さ $L > 0$ のよい環境の区間が速度 $c > 0$ で右に移動する環境のもとで生物が絶命しないのはどういう場合か？という問いかけに対し、H. Berestycki らは、 $w = 0$ における線形作用素

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + c \frac{d}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}(\xi, 0)$$

の最大固有値が正であることが必要十分条件であること (具体的には、 $c < 2$ かつ $L > L^* = L^*(c)$ であること) を示した。また、 $\frac{f(\xi, w)}{w}$ が w に関して単調減少であるという特徴から、このときの進行波解の一意性および安定性も示した。

本講演では、変分法的手法を用いて Berestycki らの必要十分条件の別の簡単な変分的特徴付けを与えること、さらに、変分法的手法を生かして、Berestycki らの扱っていない、環境がよい領域での非線形項として $\frac{f(\xi, w)}{w}$ が w に関して単調減少でないような場合 (双安定な場合など) を扱い、十分大きな L と十分小さな速度 $c > 0$ に対して、速度 $c > 0$ をもつ進行波解が 2 種類出現することを示す。

時間があれば、長さ $L > 0$ の悪い環境が速度 $c > 0$ で右に移動する環境のもとでの進行波解の存在についての結果も紹介したい。

なお、本講演内容は島崎大地氏 (首都大学東京・理工学研究科) との共同研究によるものである。