量子エルゴード性の一般化

小山 信也 (東洋大学)

数論的量子カオスの最重要概念である量子エルゴード性予想が，リンデンシュトラウスによって任意の負曲率コンパクト・リーマン面に対して 2006 年に証明され，この業績を含む彼の一連の研究が 2010 年のフィールズ賞を受賞したことは，記憶に新しい．

量子エルゴード性予想とは，ラプラシアンの固有関数の値分布が，スペクトルの増大に伴い限りなく一様になるだろうとの予想であり，量子力学における半古典極限との関連から，物理学的にも意味の深い予想である．

本講演では，量子エルゴード性のもう一つの側面である，連続スペクトルへの類似について報告する．モジュラー群や合同部分群のような数論的な離散群は基本領域が非コンパクトであり，ラプラシアンの連続スペクトルが存在する．このとき，固有関数に相当するものとしてアイゼンシュタイン級数が取れる．

アイゼンシュタイン級数は一般に明示的に定義されるので，具体的な式変形により，量子エルゴード性の証明を保型形式の L 関数の臨界線上の評価に帰着できる．そのため，従来から解析数論の研究テーマであったゼータ関数の評価が目覚ましい応用を持つ例として，注目されている．

アイゼンシュタイン級数の量子エルゴード性は，1994 年にルオ - サルナックにより $SL(2,\mathbb{Z})$ の場合に初めて示された．本講演では，彼らの結果を一般化した以下の試みについて報告する

- 3 次元双曲多様体（ビアンキ多様体）への一般化
- 合同部分群のレベル・アスペクトへの一般化
- 関数体上の合同部分群（ラマヌジャン・グラフ）への一般化

参考文献：

小山信也『素数からゼータへ，そしてカオスへ』（日本評論社）