非等方的平均曲率一定超曲面の幾何

小磯　深幸 (九州大学大学院数理学研究院，JST・さきがけ)

幾何学における重要な課題の一つに変分問題の解についての研究がある．曲面の変分問題の解の中で最も基本的なものは，極小曲面と平均曲率一定 (constant mean curvature) 曲面 (以下では CMC 曲面と略記する) であろう．前者は面積の臨界点，後者は「曲面が囲む体積」を保つ変分に対する面積の臨界点である．また，前者は平均曲率が至る所零である曲面として，また，後者はその名のとおり平均曲率が至る所一定である曲面として，幾何学的に定義される．表題の非等方的平均曲率一定 (constant anisotropic mean curvature) 超曲面 (以下では CAMC 超曲面と略記する) は，これらの自然な一般化であり，もともとは，表面の方向に依存するようなエネルギーを持つ物質を特徴付ける概念として研究が盛んになった．

さて，CAMC 超曲面は，ある種の重み付き平均曲率が至る所一定であるような超曲面として定義される．また，CAMC 超曲面は，次のような変分問題の臨界点としても特徴付けられる．F は，$(n+1)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の単位超球面 S^n 上で定義された正値可微分関数とする．$\mathbf{R}^{n+1}$ 内の滑らかな超曲面 Σ に対し，その単位法ベクトルを ν で表す．Σ 上の各点 p において $F(\nu(p))$ は p における法線の向きに依存する正数である．この Σ 上での積分

$$\mathcal{F}(\Sigma) := \int_\Sigma F(\nu)\, d\Sigma$$

を超曲面 Σ の非等方的表面エネルギーという．CAMC 超曲面は「囲む $(n+1)$ 次元体積」を保つ変分に対する汎関数 $\mathcal{F}$ の臨界点である．F に適当な凸性を仮定すると，CAMC 超曲面は 2 階非線形楕円型偏微分方程式の解となる．

同じ $(n+1)$ 次元体積を囲む超閉曲面全体の中での $\mathcal{F}$ の最小解は一意的に定まり，Wulff 図形と呼ばれている．これは，20 世紀初頭の物理学者 Wulff の名に因んでいる．

本講演では，完備 CAMC 超曲面の一意性についての研究，CAMC 超曲面の安定性 (汎関数 $\mathcal{F}$ の極小値をとるか否か)，CAMC 超曲面についての境界値問題の解の摂動・分岐・対称性の崩壊現象，CMC 曲面との相違等について，最新の研究成果を含めてお話ししたい．