リーマン多様体の崩壊と本質的被覆

筑波大学数理物質科学研究科　山口孝男

閉じたリーマン多様体の球による被覆と多様体位相の間には深い関係がある。例えば凸球による被覆の場合、多様体は被覆から決まるナーブ複体にホモトピー同値になる。このような事から多様体を位相的に自明な距離球で覆う時、その個数の最小数は多様体の位相的複雑さを反映していると思われる。

この様な発想の下で、 Cheeger, Weinstein, Grove-Petersen-Wu 達により、ある条件を満たすリーマン多様体族における位相型の有限性定理が展開されてきた。最終形は Perelman の安定性定理による。ここでの条件としては、次元 n、 正の数 D, v を固定するとき、

$$\text{断面曲率} \geq -1, \qquad \text{直径} \leq D, \qquad \text{体積} \geq v,$$

を満たす n 次元リーマン多様体全体を考えている。彼らの結果で鍵の一つとなるのは、この条件を満たす多様体は位相的に自明な距離球の一様な個数で覆われる、ことである。

一方で、体積 $\geq v$ なる条件の為、これらの多様体は崩壊することが出来ない。では自然な問いかけとして、条件 体積 $\geq v$ を取り去り、崩壊する状況を考えるとき何が言えるだろうか？

通常の被覆を考える限り、多様体を覆うに足りる位相的自明な距離球の個数は、崩壊と共に無限大に発散してしまう。この講演では、”本質的被覆” という概念を導入することによりこの困難さが克服されることを見たい。応用として、Gromov のベッチ数一様有界性の証明の新しい知見が得られる。