間隙三角級数の中心極限定理について

福山克司（神戸大理）

中心極限定理は確率論の中心たる極限定理という意味で Pólya の命名による。典型的な場合を述べると、平均 0 で分散 σ^2 が有限な独立同分布確率変数列 $\{X_n\}$ に対して

$$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_m}{\sqrt{m}}\le a\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{a}e^{-u^2/2\sigma^2}\,du\quad(m\to\infty)$$

であるが、必ずしも独立でなくてもこのことが成立することは良く知られている。

例えば自然数の単調増大列 $\{n_k\}$ の発散が速い時に以下が $\sigma^2=1/2$ に対して示される。

$$\text{(1)}\qquad \operatorname{Leb}\left\{x\in[0,1]\;\middle|\;\frac{\cos 2\pi n_1x+\cdots+\cos 2\pi n_mx}{\sqrt{m}}\le a\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{a}e^{-u^2/2\sigma^2}\,du$$

この定理は間隙条件 $n_{k+1}/n_k\to\infty$ の下で Kac (1939) が、Hadamard の間隙条件 $n_{k+1}/n_k>q>1$ の下で Salem-Zygmund (1947) が、そして 間隙条件 $n_{k+1}/n_k>1+c_k/\sqrt{k}$ $(c_k\uparrow\infty)$ の下で Erdős (1962) が示した。さらに Erdős は $c_k=c>0$ とすると反例があることを示した上で、しかしちょうどその間隙条件を満たす $n_k=\lfloor e^{\sqrt{k}}\rfloor$ に対しては中心極限定理が成立することを予想した。その予想は Murai (1982) が肯定的に解決した。

これらの結果より Erdős の間隙条件は中心極限定理を与える最良の十分条件であることが分かるが、これより間隙が小さくても中心極限定理は成り立ち得ることが分かる。実際 Berkes (1979) は任意の $L_k\uparrow\infty$ に対して $n_{k+1}-n_k\le L_k$ をみたす列で (1) を $\sigma^2=1/2$ として成り立たせるものがあることを、Salem-Zygmund (1950) に用いられている確率的方法を基礎として示した。間隙 $n_{k+1}-n_k$ が如何様にもゆっくり発散する列で $\sum\cos 2\pi n_kx$ が中心極限定理に従うものがあるというわけである。

当然、有界な間隙 $n_{k+1}-n_k\le L$ をもつ列で中心極限定理が成り立つものがあるか、ということが問題になる。最近 Bobkov-Götze (2007) は (1) が成り立つとすると、$\sigma^2\le(1-\limsup k/n_k)/2$ でなければならないことを示した。もし、$n_{k+1}-n_k\le L$ が成り立つならば、$n_k\le Lk+c$ となり、$\sigma^2\le(1-1/L)/2$ となってしまい、これまでの定理と同様に (1) が $\sigma^2=1/2$ に対して成り立つことはないというのである。有界な間隙列はその分散を必ず一部失ってしまうという驚くべき事実が判明した。

しかしながら、たとえ分散を一部失うとしても (1) が成り立つ場合があるかという問は依然未解決で残っている。この講演では以下の答えを与える。

任意の $0<\sigma^2<1/2$ に対して、$n_{k+1}-n_k\le\left\lceil(1+2\sigma^2)^2/(1-2\sigma^2)^2\right\rceil$ をみたす列 $\{n_k\}$ で中心極限定理 (1) が成り立つものが存在する。