

ハミルトン系のバーコフ標準化と非可換可積分性

伊藤 秀一 (金沢大学・理工研究域)

2008 年 7 月 16 日 大岡山談話会

ハミルトン力学系は古典力学の運動を記述する系として、数学のみならず物理学をはじめとする自然科学のさまざまな分野にも関係する重要な力学系である。太陽系の N 体問題はその最も有名な例であるが、太陽の質量が他の惑星と比べて著しく大きいので、太陽以外の惑星の運動は $N - 1$ 個の分離した 2 体問題で近似できる。2 体問題は解の挙動が完全にわかる「可積分系」であり、 N 体問題はその摂動として「近可積分系」と呼ばれる。近可積分系の研究はポアンカレが「力学の基本問題」と呼び、3 体問題が求積できないことやカオスの研究を生み出す原動力になったが、20 世紀後半に入り、KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) 理論や Nekhoroshev 理論などの本質的發展を経て、ハミルトン力学系における最も大きな問題として現在もなお活発な研究が行われている。

この近可積分系は数学的にみるときわめて特殊な状況と思われるかもしれないが、類似の状況は一般のハミルトン系の平衡解や周期解の近傍でも起こるのである。それを明らかにしてくれるのがポアンカレに始まる (ハミルトン系の場合はバーコフによる) 標準形理論であり、たとえば次が成り立つ：

定理 (G.D. Birkhoff) $H(q, p) = H_2 + H_3 + \cdots$, $H_2 = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{2} (q_j^2 + p_j^2)$ を $\mathbb{R}^{2n}$ の原点の近傍で定義された実解析的関数とする。もし、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が条件

$$(*) \quad 0 < \sum_{j=1}^n |k_j| \leq N \quad (k_j \in \mathbb{Z}) \quad \text{のとき} \quad \sum_{j=1}^n k_j \alpha_j \neq 0 \quad (N \text{ は } 4 \text{ 以上の自然数})$$

を満たすならば、適当な実解析的シンプレクティック変換 φ が存在して

$$H \circ \varphi(q, p) = h(\tau) + O(|q|^{N+1} + |p|^{N+1}), \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n), \quad \tau_k = \frac{1}{2}(q_k^2 + p_k^2).$$

となる。

上記の $h(\tau)$ は N 次のバーコフ標準形と呼ばれ、これをハミルトニアンとするハミルトン系 X_h ($\dot{q} = h_p$, $\dot{p} = -h_q$) は求積できて、トーラス $\{\tau_k = \text{const.}\}$ 上の準周期解になる。同様の標準化は不動点のまわりのシンプレクティック写像に対しても実行できる。

もし条件 (*) で $N = \infty$, すなわち $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が有理的に独立ならば、形式的なシンプレクティック変換 φ が存在して $H \circ \varphi = h(\tau)$ となるが、 X_H が完全可積分 (Liouville の意味で可積分) のときは (かつそのときに限り) φ として収束 (つまり解析的) 変換をとることができる (Rüssmann-Vey- I)。この結果は、バーコフ標準形が完全可積分なハミルトニアンの臨界点 (あるいは n 個の第一積分のつくるモーメント写像の特異点) における標準形となることを意味している。

本講演では、上記の特性指数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が有理的に従属になる場合に、可積分系に対する同様の標準形を考え、とくに自由度の個数 n より多い個数の第一積分をもつ系 (非可換可積分系 (超可積分系) という) の場合の標準形が、上記の結果の自然な拡張として得られることを紹介する。このような非可換可積分系はケプラー問題や剛体の運動など具体的な問題でしばしば現れるものであり、応用についても触れたい。