

# いくつかの凸な物体に対する散乱極について

井川 満

3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3); x_j \in \mathbb{R} \ (j = 1, 2, 3)\}$  における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$$

に対する、有界な障害物  $\mathcal{O}$  による散乱を考える．波の散乱され方を表す道具の1つとして、散乱行列  $S(z)$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) がある．物体が異なれば、対応する散乱行列も必ず異なることが証明されている．しかし、物体の幾何的性質が散乱行列の解析的性質にどのように反映しているかは、あまり良くは知られていない．この問いに対する1つの予想として、次が基本的である．

**修正 Lax-Phillips 予想**  $\mathcal{O}$  が幾何光学の意味で捕捉的であるならば、ある正の定数  $\alpha$  で、 $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \leq \alpha\}$  に、 $S(z)$  の極が無数個存在するものがある．また、 $\mathcal{O}$  が幾何光学の意味で捕捉的ではないならば、どのような  $\alpha > 0$  に対しても、 $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \leq \alpha\}$  には有限個の極しか存在しない．

この予想の後半部分は既に証明されている．しかし、捕捉的な障害物で、ある正の定数  $\alpha$  で、 $\operatorname{Im} z \leq \alpha$  に極が無数個存在するようなものの例すらあまり知られてはいない．知られている代表例は次のものである：

1.  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  where  $\overline{\mathcal{O}_1} \cap \overline{\mathcal{O}_2} = \emptyset$  and  $\mathcal{O}_j (j = 1, 2)$  are strictly convex.
2.  $\mathcal{O}$  は湾を持つ回転体．

例1に関し、障害物  $\mathcal{O}$  を構成する狭義凸な物体の個数を増やすことは出来ないか、ということが考えられる．しかし、2個の場合の証明方法は、3個の場合には有効ではない．その理由は、2個の場合は素な周期軌道は唯1個であるが、3個の場合には一般的には無限個の素な周期軌道があり、周期軌道一つ一つを切り離すことが出来ないことにある．この場合には、周期軌道全体を用いて定義されるある関数  $F_D(\mu)$  が特異性を持つならば、この3個以上の狭義凸な物体からなる障害物  $\mathcal{O}$  に対して、修正 Lax-PHillips 予想は成り立っていることが確かめられる．しかしながら、ある関数の特異性の存在を確かめられる例もごく限られる．

さて、障害物が2個の物体から成る場合は、ある正数  $\mu_0$  が物体より定まり、そしてある正数  $\mu_1$  がとれて、 $\operatorname{Im} z \leq \mu_0 + \mu_1$  の範囲では、対応する散乱行列の極は

$$(1) \quad z = i\mu_0 + \frac{\pi}{d}m, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (d = \operatorname{dist}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2))$$

に漸近する列があり、この範囲では絶対値が大きい極はこれら以外には無いことも分かる．

2個の物体を定めておき、十分小さい第3番目の物体を加えて、新たに作られた障害物に対する関数  $F_D(\mu)$  の、特異性の存在は確かめることが出来る．従って、第3番目の物体が加えられた障害物の散乱行列について、ある  $\alpha > 0$  で、 $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \leq \alpha\}$  が極を無限個もつようなものが存在することを確かめられる．しかし、次の問題は全くオープンである．

**問題** 付け加えられる第3番目の物体を十分小さくすれば、3個からなる障害物  $\mathcal{O}$  の散乱極は、(1) で与えられる（無限個の）点の近くに現れるか？