退化したsecant 多様体をもつ射影多様体について

早稲田大学 理工学術院
梶　元 (かじはじめ)

「与えられた代数多様体 X をどれくらい小さい次元の射影空間 $\mathbb{P}^m$ に埋め込めるか?」という素朴な問題を考える．射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ の場合, $\mathbb{P}^N$ の射影を用いて上記問題を考えるなら X の secant 多様体に着目することが重要である．ここで, $X \subseteq \mathbb{P}^N$ の secant 多様体 とは,

$$\operatorname{Sec} X := \overline{\bigcup_{x,y\in X, x\neq y} x * y} \subseteq \mathbb{P}^N$$

により定義される射影多様体 $\operatorname{Sec} X$ のことである．ただし, $x * y$ は, 2 点 $x, y \in X$ を結ぶ $\mathbb{P}^N$ 内の (複素射影) 直線, すなわち, secant 直線である．secant 多様体に着目する重要性は, 点 $P \in \mathbb{P}^N$ からの射影 $\pi_P : \mathbb{P}^N \setminus \{P\} \to \mathbb{P}^{N-1}$ に対して,

$$\pi_P|_X : X \to \pi_P(X): \text{ 同型} \quad \Leftrightarrow \quad P \in \mathbb{P}^N \setminus \operatorname{Sec} X$$

が成り立つ点にある．$\dim X = n$ とすると $\dim \operatorname{Sec} X \leq 2n+1$ となることが定義より見て取れるので, X を $\mathbb{P}^{2n+1}$ へ像と同型となるように射影できることはわかる．では, さらに小さな次元の射影空間に埋め込むことはできるだろうか?

本講演では, secant 多様体が退化している (すなわち, $\dim \operatorname{Sec} X < 2n+1$ となる) 射影多様体にまつわる研究の歴史の一側面を, 1901 年の F. Severi の結果から始めて辿ってみたい.

大岡山談話会@東京工業大学, 2008/06/04, 15:20–16:20