

Lusternik-Schnirelmann カテゴリ数 と位相的複雑さ

岩瀬 則夫

固定された点（原点）から自由な端点へ伸びる Robot Arm が $n-1$ 個の完全に自由に動く節を持つとき、その状態の全体は、数学的には原点から続く $n+1$ 個の点列で、隣り合う点がある一定の距離 $r_1 > 0, \dots, r_n > 0$ にある点列のなす、次の配置空間（configuration space） B と見なされる。

$$B = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^k)^{n+1} \mid x_0 = 0, |x_i - x_{i-1}| = r_i, 1 \leq i \leq n\}$$

さて、Robot Arm の二つの状態の間の動作は、配置空間 B の中の道 - path - と考えることができる。このような Robot Arm の動作をロボット動作（Robot Motion）と呼び、その為の設計アルゴリズムをロボット動作設計（Robot Motion Planning）などということがある。このロボット動作は数学的には閉区間 $[0, 1]$ から B への連続写像とみなされる。そのような閉区間 $[0, 1]$ から B への連続写像全体を $\mathcal{P}(B)$ で表すと、後で見るように $\mathcal{P}(B)$ は自然に位相空間の構造を持ち、以下のような Serre による path fibration π が付随する：

$$\pi : \mathcal{P}(B) \longrightarrow B \times B, \quad \pi(\ell) = (\ell(0), \ell(1)).$$

2003 年に M. Farber [1] は、Robot Arm の状態間の動作を与える設計アルゴリズムの定義を提案した：それは最初と最後の二つの状態が任意に与えられたときに、それらを繋ぐ Robot Arm の動作を与えるものであり、数学的には $B \times B$ から $\mathcal{P}(B)$ への連続写像 $s : B \times B \rightarrow \mathcal{P}(B)$ で $s(b)(0) \in B$ と $s(b)(1) \in B$ が各々与えられた最初と最後の Robot Arm の状態となるものである。言い換えれば、

$$s : B \times B \longrightarrow \mathcal{P}(B) \text{ は fibration } \pi : \mathcal{P}(B) \longrightarrow B \times B \text{ の section である。}$$

さて、M. Farber は同時に次のような問題を提出した：

与えられた二つの状態間を動作する設計アルゴリズムは存在するのか？

これに対して Farber 自身の与えた解答は次のように述べられる：

定理 0.1 単一の設計アルゴリズムが存在するには配置空間が可縮である事が必要かつ十分である。

すなわち、可縮でない十分に複雑な配置空間においては、単一の設計アルゴリズムによってはすべての Robot Arm の動作をカバーする事はできないのである。Farber は、さらに次の問題を提出した：

全ての状態をカバーするにはいくつのアルゴリズムが必要になるのか？

数学的には、配置空間が多面体の構造を持つなどの「良い空間」であれば次に述べる Schwartz genus（後に James により sectional category と呼ばれることになる）という不変量により記述される：

定義 0.2 (Schwartz) ファイバー空間 $p : E \rightarrow X$ の位相不変量 $\text{Genus}(p) = \text{secat}(p) + 1$ とは、以下の条件を満たす最小の自然数 $m \geq 1$ （もし無ければ $m = \infty$ とする）のことである：空間 X の m 個の開集合からなる族が X を覆い、各々の開集合上で p の section が存在する。

定義 0.3 (Farber [2]) 空間 B の位相的複雑さ (Topological Complexity) $TC(B)$ とは、 π の Schwartz genus $\text{Genus}(\pi)$ のことである。

注 0.4 小論では sectional category の定義としていわゆる normalize したものを考える為に、Schwartz genus とは 1 ずれることになり、 $TC(B) = \text{Genus}(\pi) = \text{secat}(\pi) + 1$ となる。

さらに 2006 年には, Farber [2] はもう少し強い「動作設計 (Motion Planning)」を提唱し、「対称動作設計 (Symmetric Motion Planning)」と呼んだ。これは original の Robot の状態遷移を与える section s_i に次の 2 条件を課すものである：

(M) もし最初と最後の状態が同じなら、その状態遷移は静止したものである。

(S) 最初と最後の状態を入替えた場合、状態遷移は元の状態遷移の逆になる。

実はごく最近になって、通常の動作設計と対称動作設計のちょうど中間に位置する動作設計が一つの安定な概念 - 「単位動作設計 (Monoidal Motion Planning)」として提出可能であることに気がついた。

定義 0.5 与えられた空間 B に対して、「単位位相的複雑さ (Monoidal Topological Complexity) $TC^M(B)$ とは、以下の条件を満たす最小の自然数 $m \geq 1$ (もし無ければ $m = \infty$ とする) のことである：積空間 $B \times B$ の m 個の開集合からなる族 $U_i \subset \Delta(B)$ が $B \times B$ を覆い、各々の開集合上で Serre path fibration $\pi : \mathcal{P}(B) \rightarrow B \times B$ の section $s_i : U_i \rightarrow \mathcal{P}(B)$ が存在し、任意の $b \in B$ に対して条件 $s_i(b, b) = c_b$ (c_b は b で静止する道 - constant path at b) を満たす。

実は、単位位相的複雑さという位相不変量は通常の意味ではホモトピー不変量ではない。また 2006 年以後、L-S 理論との類似から、次のような位相的複雑さに対する不変量が導入された：

定義 0.6 (Farber [1, 2] and Farber-Grant [3]) 位相空間 B と単位的環 $R \ni 1$ に対して定義されるイデアル $I_R = \ker \Delta^* : H^*(B \times B, R) \rightarrow H^*(B; R)$ に対する二つの不変量、zero-divisors cup-length $\mathcal{Z}_R(B)$ と TC-weight $\text{wgt}_\pi(u; R)$ for $u \in I_R$ が次のように定義される。

(1) (Farber) $\mathcal{Z}_R(B) = \text{Max} \{m \geq 0 \mid H^*(B \times B, R) \supset I_R^m \neq 0\}$

(2) (Farber-Grant) $\text{wgt}_\pi(u; R) = \text{Max} \{m \geq 0 \mid \forall f: Y \rightarrow B \times B, \text{secat}(f^*\pi) < m, f^*(u) = 0\}$

これらの不変量は L-S 理論における同様な不変量である cup-length と category weight の変位形として定義されたものである。ごく最近、ロボット動作設計の位相的複雑さという新しい理論と L-S 理論とを、L-S 理論を James 流の fibrewise に考えることにより結び付けることができた。そこで、最近の L-S 理論の成果を位相的複雑さの理論内部に取り入れる為の可能性を探りたいと考えている。

文 献

- [1] M. Farber, Topological complexity of motion planning, Discrete Comput. Geom. **29** (2003), 211--221.
- [2] M. Farber, Topology of robot motion planning, "Morse theoretic methods in nonlinear analysis and in symplectic topology", 185--230, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 217, Springer, Dordrecht, 2006.
- [3] M. Farber and M. Grant, Symmetric Motion Planning, Topology and robotics, 85--104, Contemp. Math., 438, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [4] N. Iwase, and M. Sakai, Topological Complexity is a Fibrewise L-S Category, preprint, 2008.
- [5] I. M. James, Lusternik-Schnirelmann Category, In: "Handbook of algebraic topology", 1293-1310, North Holland, Amsterdam, 1995.
- [6] G. W. Whitehead, "Elements of Homotopy Theory", Springer Verlag, Berlin, 1978, Graduate Texts in Mathematics **61**.