

# リッチフローの曲率基点型評価への一考察

戸田 正人

2007 年 11 月 12 日

多様体  $M$  上のリッチフローとは方程式  $\partial_t g_{ij} = -2 \text{Rc}_{ij}$  で与えられる、時間パラメータ  $t$  に関する計量  $g_{ij}$  の変形である。このとき、曲率テンソル  $\text{Rm}$  は  $D_t \text{Rm} - \Delta \text{Rm} = \text{Rm}^2 + \text{Rm}^\sharp$  なる熱方程式を満たす。 $\text{Rm}^\sharp$  は  $\mathfrak{so}(n)$  のリー環の構造を用いて定義される  $\text{Rm}$  の二次形式である。リッチフローの基本的な局所評価はつぎの主張である。

定理 1 (Shi [Shi89]). 時空  $M \times [-r^2, 0]$  上で定義された完備なリッチフロー  $(M, g(t))$  が  $(p, 0) \in M \times [-r^2, 0]$  の放物型近傍  $P_r(p, 0) = B(p, r, 0) \times [-r^2, 0]$  上で曲率有界条件  $|\text{Rm}| \leq Qr^{-2}$  を満たしているとき、 $P_{\theta r}(p, 0)$ ,  $\theta \in (0, 1)$  上

$$|\nabla \text{Rm}| \leq C(\theta)Q^{3/2}r^{-3}, \quad |D_t \text{Rm}| \leq C(\theta)Q^2r^{-4}$$

が成り立つ。高階微分についても同様の結論が成り立つ。

基点つきリッチフロー列  $(M_k, g_{ij}^k, p_k, 0)$  が与えられているとき、 $r_k^{-2} = \sup_{P_{r_k}(p_k, 0)} |\text{Rm}|$  とおく。この列の  $r_k^{-1}$  倍スケールリング  $(M_k, r_k^{-2}g_{ij}^k, p_k, 0)$  を考える。この列の単射半径が下から一様評価されるとき、定理 1 の結論から、その上のリッチフローの計量が  $P_1(p_k, 0)$  上で  $C^\infty$  級広義一様に部分収束する。これがリッチフローの基本的な局所コンパクト性である。一方 3 次元の場合、「標準近傍定理」と呼ばれるペレルマンの導いたもっとも重要な結論もコンパクト性として述べることができる。

定理 2 (標準近傍定理 [Per02]).  $[-T_k, 0]$ ,  $1 \leq T_k \leq T < \infty$  上の 3 次元コンパクト多様体  $M_k$  上の基点つきリッチフローの列  $(M_k, g_{ij}^k(t), p_k, 0)$  が  $t = -T_i$  で  $\text{Rm} \geq -1$ ,  $\text{vol}(M_k, g_k) > 1$  を満たしているとし、 $r_k^{-2} = |\text{Rm}(p_k, 0)|$  とおく。この列が  $r_k \rightarrow 0$  を満たすとき、 $r_i^{-1}$  倍のスケールリング  $(M_k, r_i^{-2}g_{ij}^k, p_k, 0)$  は  $M_\infty \times (-\infty, 0]$  上で定義された完備リッチフローに部分収束する。

局所コンパクト性と比べると定理 2 のコンパクト性は収束が大域的であるという他にスケールリングファクターの基準が基点の曲率のみで決まっていて、(このスケールリングを基点スケールリングと呼ぶことにする) 局所的な情報に依存しないのが重要な違いである。つまり基点スケールリング列が大域的に曲率評価を持つことが示されたのである。この曲率評価を基点型評価と呼ぶ。

定理 2 の証明は 3 次元の特殊性に強く依存している。ペレルマンは背理法の議論において反例の列を取り換える論理的トリックで局所基点型評価の問題を 3 次元の特異性モデルの基点型曲率評価に帰着した。特異性モデルの 3 次元固有の状況を利用して、考えている反例の列については局所基点型評価はなりたつ、として議論を進めてよい状況を作り、大域的な基点評価を得るのである。しかし、たとえば 4 次元の場合には同じトリックは適用できないから、局所基点型評価すら自明でない。現時点で 3 次元以外で局所基点型評価は得られていないが、この問題に関する筆者の最近の試行錯誤についてお話したい。いまおもに用いている手法はリッチフロー上の共役熱方程式の基本解を用いて曲率評価を行おう、というものである。

## 参考文献

- [Per02] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv:math.DG/0211159 (2002).
- [Shi89] W.X. Shi, *Ricci deformation of the metric on complete noncompact Riemannian manifolds*, J.D.G. **30** (1989), 303–394.