可微分写像の特異ファイバーとその応用

佐伯　修（九州大学大学院数理学研究院）

可微分多様体 M が与えられたとき，その（微分）トポロジーを調べるための一つの重要な方法に，その上の Morse 関数

$$f : M \to \mathbf{R}$$

を用いるものがある．いわゆる **Morse 理論**である．Morse 関数の臨界点（特異点）を調べることにより，多様体のハンドル分解に関する情報や，ホモロジー的情報が取り出せることが知られており，古典的な微分トポロジーはこれに基づいて大きな発展を遂げたと言っても過言ではない（たとえば Smale による高次元 Poincaré 予想の解決などを想起していただきたい）．

全世紀の半ば，Thom はこうした関数の理論を，写像の理論へと拡張することを試みたが，現れる特異点の複雑さのため，すぐに拡張はできなかった．そこで，主に局所的に現れる特異点を調べるために「写像の特異点論」が生まれ，その後 Mather らにより大きな発展があった．しかしながらもともとの動機である Morse 関数の拡張としての特異点論は，残念ながらそれほど発展していない．

本講演では，写像の特異点に着目するかわりに，写像の**特異ファイバー**に着目し，それを通して Morse 理論の（一部の）拡張が可能であることを紹介したい．なお，特異ファイバーとは，可微分多様体間の可微分写像

$$f : M \to N$$

と，その特異値 $y \in N$ に対して，逆像 $f^{-1}(y)$，あるいはそれに沿った写像芽

$$f : (M, f^{-1}(y)) \to (N, y)$$

のことを指す．

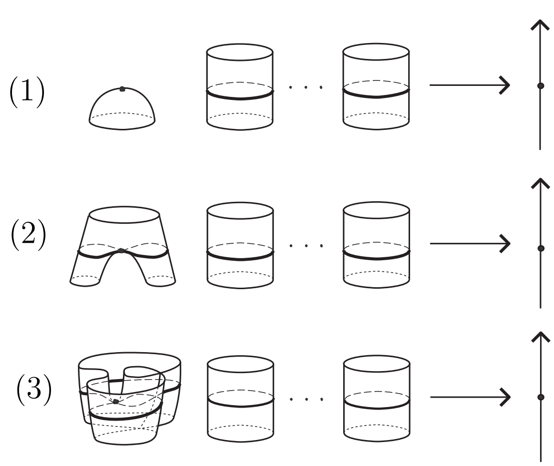

図 1: 曲面上の Morse 関数の特異ファイバー