シュレディンガー方程式の解の特異性について

中村　周（東京大学・数理科学研究科）

偏微分方程式の初期値問題を考えるとき、解の特異性の決定は基本的な問題である。古典的な偏微分方程式を考えると、熱方程式の解は、正の時刻では全く特異性を持たない。つまり、特異性は消え去ってしまうので、消散型と呼ばれる。一方、波動方程式を代表とする双曲型の方程式においては、特異性は相空間での対応するハミルトン流に沿って伝播する、というヘルマンダーによる古典的な結果が知られている。特に、波動方程式の場合は、特異性は幾何光学の軌道に沿って伝播する。

量子力学の基礎方程式であるシュレディンガー方程式の場合について同様の問題を考えると、古典的な方程式とは大きく様相が異なる。方程式の形は熱方程式に似ているが、時間について可逆な方程式なので、特異性が消えるというようなことは起こりえない。一方、波動方程式のように有限の伝播速度を持つわけではなく、波の伝播速度は無限大なので、双曲型方程式のような「特異性の伝播定理」は期待できない。その代わりに、初期条件が無限遠方で早く減少していれば、それに応じて０以外の時間では滑らかさが増える、という「平滑化作用」が知られている。これは、狭い領域に局在した初期条件の波は速度無限大で無限遠方に飛んでいき、解は滑らかになる、という意味で、一種の「速度無限大の特異性伝播定理」と考えることができる。

近年の研究の発展により、（変数係数の）シュレディンガー方程式の解の特異性は、高いエネルギーでの古典力学系の漸近的振る舞いにより特徴付けられることが分かってきた。具体的には、ある時間での解の波面集合（超局所的特異点の集合）は、初期条件の対応する古典軌道上での減少の大きさにより決定できることが分かる。Craig-Kappeler-Strauss の超局所的平滑化作用などの既知の結果は、これより直ちに従う。証明のアイデアは、相空間でのシュレディンガー方程式の半古典解析や、長距離型の散乱理論の手法に由来しており、数理物理的な直観に沿ったものである。

談話会では、これらの結果について、歴史的背景を交えながら紹介したい。