ツイスター切断による埋め込み定理

長友康行
(九州大学大学院数理学研究院)

4 次元球面 S^4 上の反自己双対方程式 (ASD 方程式) の解、-インスタントン-を与える ADHM(Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin) 構成法では、行列によるインスタントンの具体的な表示が際立った特徴である。しかし、この構成法は、より幾何学的には S^4 からグラスマン多様体への写像を与えることにより、問題となるベクトル束と接続をグラスマン多様体のある標準的なベクトル束と接続の引き戻しとして構成する方法であると解釈することが可能である。もちろん、ここで問題となるグラスマン多様体への写像は特別な性質をみたしていなければ、反自己双対方程式の解を与えはしない。

また、ADHM 構成法は 2 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^2$ 上にも類似物をもつ。これは Buchdahl によるものだが、この Buchdahl 構成法においても上のように $\mathbb{C}P^2$ からグラスマン多様体への写像が与えられ、インスタントンが引き戻しにより構成されていると解釈することが可能である。

両構成法は、ツイスター空間を利用して、正則構造に関する問題に翻訳されることにより達成されるなど極めて似通った点があるが、しかし、相違点も存在する。S^4 においては、グラスマン多様体への写像を構成するにあたり、スピン束が使われるが、$\mathbb{C}P^2$ はスピン多様体ではないので、スピン束は存在しない。そこで、スピン束に代わるベクトル束が利用される。

ここで、強調しておきたい共通点がある。上で述べたように、どちらの構成法においてもベクトル束が利用されるわけだが、より重要な役割を果たすのはその切断である。どちらの場合も、利用される切断は「ツイスター方程式」といわれる方程式をみたすのである。(このツイスター方程式は、ディラック方程式の "直交補" 方程式とでもいえるものである。)

また、$S^4, \mathbb{C}P^2$ ともに対称空間であるが、これらはとくに四元数構造をもつ対称空間として知られている。その等長変換群 (の普遍被覆群) はそれぞれ、$\mathrm{Sp}(2) \cong \mathrm{Spin}(5)$, $\mathrm{SU}(3)$、換言すれば C_2 型、A_2 型のコンパクトリー群である。そして、上記ベクトル束はどちらとも等質ベクトル束なのである。

そこで、今回の話では、ツイスター方程式に焦点をあてることにしたい。ただし、その舞台を等長変換群が A,B,C,D,E,F,G 型のコンパクトリー群である四元数構造をもつ対称空間に広げ、特別な場合に統一的な見方を与えたい。当然、高次元化されたインスタントンや、考察すべきベクトル束などが問題となるがこれらを四元数幾何学の立場から説明することにする。さらに、より具体的な例の中では等質束などを利用して、Bott-Borel-Weil の定理を使って説明することにしたい。最後に、この具体的な例だけをとっても、S^4 や $\mathbb{C}P^2$ の 1-インスタントンといわれる対象が含まれていることに注意しておきたい。