ブラックホールの不等式

山田澄生
(東北大学理学研究科)

三次元の漸近的平坦なリーマン多様体は、アインシュタイン方程式を満たす４次元のローレンツ多様体の中で空間方向に伸びたスライスのモデルとして、アインシュタイン方程式の解析に重要な役割を果たします。ネーターの定理によって、漸近的平坦という条件からミンコフスキー空間との漸近的近似から生じるハミルトニアンが存在し、その量を ADM 質量と呼びます。この質量 M がアインシュタイン方程式の解が満たすべき必要条件のもと（もっとも簡単な場合スカラー曲率が正）で正（非負）

$$M \geq 0$$

であるという定理が Schoen-Yau, Witten による正質量定理といわれるものです。ここで質量がゼロの場合は多様体は $\mathbf{R}^3$ であるという等号の剛性が成立します。 2000 年を前後して，質量の下界がゼロではなく、その三次元多様体のもつ幾何学的な量、正確には outermost horizons と呼ばれるブラックホールの境界をモデルする極小球面の面積 A で決定されるというのが Huisken-Ilmanen, Bray によって独立に示さされ Riemannian Penrose 予想です；

$$M \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}}.$$

ここで等号が成り立つときは Schwarzschild スライスに限るという等号のときの剛性がここでも成り立っています。

今日の話では質量の下界に horizon 上の電荷から生じる電場 Q の効果を考慮した Penrose 予想を一般化した不等式

$$M \geq \frac{1}{2}\Big(R + \frac{Q^2}{R}\Big)$$

（ここで R は面積半径 $\sqrt{\frac{A}{4\pi}}$) が成立しないことを反例を幾何学的に構成することによって示します。ここで三次元多様体が、いわゆる Reissner-Nordström スライス であるとき上の不等式は等式になりますが，R-N スライスは、正質量定理の Minkowski スライスまたは Penrose 予想の Schwarzshild スライスのときにみられる質量の下限を与えるモデルとはなっていないことがこの反例からわかります。