有限整アデール環 $\widehat{\mathbb{Z}}$ 上の極限定理

金沢大学大学院自然科学研究科
高信 敏

数論的極限定理を論ずる際，我々は自由に計算が出来るようにと有理整数環 $\mathbb{Z}$ を適当に完備化し，入れ物を完全にすることが度々ある．$\mathbb{Z}$ の完備化は，扱う問題の数だけ (少しオーバーな云い方かもしれないが...) ある．ここでは，その中の 1 つ，有限整アデール環 $\widehat{\mathbb{Z}}$ を取り挙げ，そしてその上での確率論における極限定理について紹介する．

まず，各素数 p に対して，$\mathbb{Z}_p$ を p 進整数環，即ち，$\mathbb{Z}$ 上の p 進距離 d_p による完備化とする: $d_p(m,n) = \inf\left\{p^{-k}; p^k \mid (m-n)\right\}$ $(m,n \in \mathbb{Z})$．$\mathcal{B}(\mathbb{Z}_p)$ を $(\mathbb{Z}_p, d_p)$ のボレル集合族，λ_p を $(\mathbb{Z}_p, \mathcal{B}(\mathbb{Z}_p))$ 上のハール確率測度とし，そして我々の基礎確率空間は

$$(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(\widehat{\mathbb{Z}}), \lambda) := \prod_{p:\text{素数}} (\mathbb{Z}_p, \mathcal{B}(\mathbb{Z}_p), \lambda_p)$$

とする．この $\widehat{\mathbb{Z}}$ が我々のターゲットであり，有限整アデール環とよばれるものである．実は $\mathbb{N} \cong \{(n,n,\ldots) \in \widehat{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{N}\}$ は $\widehat{\mathbb{Z}}$ で稠密であることに注意して欲しい．

この確率空間 $(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(\widehat{\mathbb{Z}}), \lambda)$ 上で我々が考える (ことが出来る) 極限定理とは次である．自然数 k に対して $\rho_k(x) := \mathbf{1}_{k\widehat{\mathbb{Z}}}(x) = \begin{cases} 1, & k \mid x, \\ 0, & k \nmid x \end{cases}$ とおく．

定理. (i) オイラー関数 $\phi(n)$ は $\frac{\phi(n)}{n} = \prod_p \left(1 - \frac{\rho_p(n)}{p}\right)$ と表示されるので，これを使って $\widehat{\mathbb{Z}}$ 上の関数に自然に拡張すると，次の強大数の法則が成り立つ:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \prod_p \left(1 - \frac{\rho_p(x+n)}{p}\right) = \frac{6}{\pi^2}, \quad \lambda\text{-a.e. } x.$$

(ii) $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 上の関数 $X(m,n) = \begin{cases} 1, & \gcd(m,n) = 1, \\ 0, & \gcd(m,n) > 1 \end{cases}$ は $X(x,y) = \prod_p (1 - \rho_p(x)\rho_p(y))$ と表示されるので，これを $\widehat{\mathbb{Z}}\times\widehat{\mathbb{Z}}$ 上の関数に自然に拡張すると，次の強大数の法則が成り立つ:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} X(x+i, y+j) = \frac{6}{\pi^2}, \quad \lambda\times\lambda\text{-a.e. } (x,y).$$

我々，確率論者の (1 つの) 性(さが)であるが，大数の法則が成り立つことが分かると，次はそれの精密化であるところの中心極限定理に興味が向いてしまう．今の場合，上の (i), (ii) はどうなっているのであろうか？ これの “ 答え” については講演でお話します．