

臨界確率における確率モデルの熱伝導について

熊谷 隆

(京都大学数理解析研究所)

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kumagai>

D 次元正方格子上の各々のボン드가、確率 p で開き、確率 $1-p$ で閉じているような確率モデルを考えよう。物体への雨水などの「浸透」の仕方を単純化したこのモデルはパーコレーションモデルと呼ばれ、確率論において最も基本的なモデルとして多くの研究がなされてきた。例えば、 $D \geq 2$ ではある $p_c \in (0, 1)$ が存在して、 $p > p_c$ のとき無限クラスター（開いているボンダ達の連結成分で、長さが無限大のもの）が確率 1 で存在し、 $p < p_c$ では無限クラスターは確率 1 で存在しないことが知られている。このような p_c を臨界確率と呼ぶ。我々の興味は、臨界確率におけるクラスター上で、どのような熱伝導が観察されるか、という問題である。臨界確率では無限クラスターは確率 1 で存在しないと信じられている（ D が 2 の場合と十分大きい場合は、厳密に証明されている）ので、クラスターサイズが無限大であるという条件付き確率の下で考える。このようなランダムクラスターを、incipient infinite cluster (IIC) と呼ぶ。臨界確率においては、長さ n のボックス内に存在する最大のクラスターの長さは十分高い確率で n のオーダーであると考えられているので、臨界確率におけるパーコレーションクラスター上での物理現象は、この IIC 上のランダムウォークを調べることによって捉えることができるのである。

臨界確率における確率モデル上の熱伝導は、数理物理学者によって 1970 年代頃から様々なシミュレーションがなされ、クラスターの形状がフラクタル的であり、熱の伝わり方がユークリッド空間上の場合に比べて“遅い”（劣拡散的な挙動をする）ことが観察されている。しかし、臨界確率における解析は技術的に大変な困難を伴うため、厳密な結果は現在までのところ何も知られていない。

本講演では、パーコレーションモデル上の熱伝導に関する近年の研究について概観した後、正則樹木（各点から出るボンダの数が一定である樹木）上のパーコレーションモデルについて、臨界確率における IIC 上のランダムウォークの熱核挙動に関する研究 [1] を紹介する。時間が許せば、証明の背景にある実解析的な手法と確率論的手法、特にこの 20 年間に発展したフラクタル上の解析学・確率過程論との関係についても、簡単に触れたい。

参考文献

- [1] M.T. Barlow and T. Kumagai Random walk on the incipient infinite cluster on trees, Preprint 2005 (RIMS Preprint Series 1493).