4 次元スピン多様体の KO 特性数

東大数理 古田 幹雄

以下の順序で話をする予定である．

- （１）正の第一 Betti 数をもつ 4 次元スピン多様体には，Dirac 作用素の族の指数を利用して，ある不変量が定義される．(この不変量は KO 特性数と呼ばれる不変量のある種の拡張である．)
- （２）この KO 特性数は 4 次元スピン多様体の Seiberg-Witten 不変量と関連がある．(Szabo-Morgan, Ruberman-Strle によって，ホモトピー K3 曲面，ホモトピートーラスに対して，Seiberg-Witten 不変量が常に奇数であることが示されている．これらの現象の延長上にある．)
- （３）逆に，Seiberg-Witten 不変量が分かるとき，この KO 特性数を決定できる例がある．(シンプレクティック多様体の Seiberg-Witten 不変量はしばしば決定可能であり，これが例を提供する．)

なお,（１）（２）は亀谷幸生氏との，また（３）は Tian-Jun Li 氏との共同研究に基づく．

（２）あるいは（３）の現象は，nonabelian な不変量 (SW 不変量) が abelian な不変量（指数）と関連することを意味している．(他に，そのような例として，Casson タイプの不変量と Alexander 多項式との関連が挙げられる．)

以下,（１）について説明する．

1. スピン閉多様体は KO ホモロジー理論における基本類をもつ．特に，スピン閉多様体から一点への写像に付随してこの基本類の像が，一点の KO ホモロジー群の要素として定まる．この要素は KO 特性数と呼ばれる．
2. 一方，一般に空間 X に対して，X から $H^1(X, \mathbf{Z})$ の分類空間への分類写像が定まる．この分類空間は次元が $b_1(X)$ に等しいトーラスである．この分類写像は，ある文脈で Albanese 写像と呼ばれるものに相当する．
3. ここでは，X が 4 次元スピン多様体であるとき，Albanese 写像による KO 基本類の像を考察したい．スピン構造に伴って，分類写像の像であるトーラスには involution が入り，KO 基本類の像は，トーラスの，involution によるある種の同変 KO 群の要素と見なされる．