

複素鏡映群に付随した Hecke 環に対する Schur-Weyl の相互律

庄司 俊明 (名大多元数理)

一般線形群 $GL_n(\mathbf{C})$ はベクトル空間 $V = \mathbf{C}^n$ に自然に作用し, m 回のテンソル積 $V^{\otimes m}$ 上に $GL_n(\mathbf{C})$ の作用が得られる. 一方, テンソルの各成分の入れ換えとして対称群 S_m が $V^{\otimes m}$ に作用し, その作用は $GL_n(\mathbf{C})$ の作用と可換になる. この時, $V^{\otimes m}$ の線形変換で, S_m の作用と可換なものは, $GL_n(\mathbf{C})$ の作用から得られるものであり, 逆に $GL_n(\mathbf{C})$ の作用と可換なものは, S_m の作用から得られるものである、というのが $GL_n(\mathbf{C})$ と S_m に関する Schur-Weyl の相互律である. Schur-Weyl の相互律により, より簡単な群である対称群 S_m の表現を利用して, $GL_n(\mathbf{C})$ の表現論を研究するというのが Schur のアイディアであった.

$GL_n(\mathbf{C})$ の Lie 環 $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ の普遍展開環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ も $V^{\otimes m}$ に作用し, $U(\mathfrak{gl}_n)$ と S_m の間にも Schur-Weyl の相互律が成立する. ところで, $U(\mathfrak{gl}_n)$ のパラメータ q による変形として量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ が, 神保, Drinfeld により導入されている. $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ はパラメータ q を持つ結合代数であり, $q \mapsto 1$ で, もとの $U(\mathfrak{gl}_n)$ が復活する. $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ の自然表現 V から $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ のテンソル積表現 $V^{\otimes m}$ が同様に得られる. 一方, 対称群 S_m の群環のパラメータ q による変形として Hecke 環 $H_q(S_m)$ が定義される. 神保は, $V^{\otimes m}$ 上に $H_q(S_m)$ の作用を定義し, $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ と $H_q(S_m)$ に対しても Schur-Weyl の相互律が成立することを示した (Schur-Weyl の相互律の q -類似).

対称群 S_m と巡回群 $(\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})^m$ との半直積 $W_{m,r} = S_m \ltimes (\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})^m$ を考える. $r = 1$ の時, $W_{m,1} = S_m$ であり, $r = 2$ の時 $W_{m,2}$ は B_m 型の Weyl 群に一致する. 一般に, Weyl 群 W に対して Hecke 環 $H_q(W)$ が定義されるが, 有木-小池により, $W_{m,r}$ に対しても, Hecke 環 $H_{q,u}(W_{m,r})$ が構成されている (Ariki-Koike 代数と呼ばれる). ただし, $u : u_1, \dots, u_r$ は r 個の別のパラメータである. 講演では $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ を, $\mathfrak{gl}_n$ の適当な部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対する量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ に置き換えることにより, $U_q(\mathfrak{g})$ と $H_{q,u}(W_{m,r})$ の間にも Schur-Weyl の相互律が成立することを説明する. ところで, これまでの話では, パラメータ q, u は変数として考えていた. q, u に適当な複素数を代入すると $\mathbf{C}$ 上の代数が得られる. q に 1 の巾根を代入すると, $U_q(\mathfrak{g}), H_{q,u}(W_{m,r})$ は共に表現の完全可約性が崩れ, モジュラー表現と同様の現象が現れる. このような状況では一般に Schur-Weyl の相互律は成立しないが, q, u に弱い条件をつければ, Schur-Weyl の相互律が復活する. 講演では, Ariki-Koike 代数の変形版である, 変形 Ariki-Koike 代数に対する Schur-Weyl の相互律についても述べる.