Caloric morphism について

下村勝孝（茨城大学理学部）

2005 年 1 月 31 日

平面上の調和関数 u $(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0)$ に正則関数 $f(z)$ を合成した $u\circ f$ は再び調和関数となり, 正則関数による座標変換は平面上の調和関数の研究に役立ちます. 3 次元以上では 2 次元ほど多くの変換はありませんが, Kelvin 変換

$$u(x)\mapsto \frac{1}{|x|^{n-2}}u(\frac{x}{|x|^2})\quad (x\neq 0)$$

が, 外部領域の解を内部領域の解に変換するのに用いられます. 熱方程式

$$(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_x)u(t,x)=0$$

(Δ は Laplacian) の場合には, Appell 変換

$$u(t,x)\mapsto (4\pi t)^{-n/2}\exp\Big(-\frac{|x|^2}{4t}\Big)u(-\frac{1}{t},\frac{x}{t})\quad (t>0)$$

がそれにあたります.

この Appell 変換のように, f: 写像, φ: 正値関数, による変換

$$u(t,x)\mapsto \varphi(t,x)\,(u\circ f)(t,x)$$

で, 熱方程式の解を保存するものを, Caloric morphism と定義します.

今回は最初にユークリッド空間上の Caloric morphism について, 例, 特徴付け, 直積や直和による Caloric morphism の構成, ある条件下での Caloric morphism の形の決定等について述べます.

次に, 多様体 M 上の熱方程式 $(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta)u(t,x)=0$ (Δ は M の Laplacian) についても, 同じように Caloric morphism を定義し, 対応する形で特徴付け定理を得られることについて述べます. その際, 計量が正定値でない場合も考えることにより, ユークリッド空間, リーマン多様体上の Caloric morphism の性質の内,

1. 時間変数の変換は空間変数に依存しない.
2. 時間の方向は変換によって保たれる.

が, M の計量の正値性によるものであることがわかります.

最後に, $\mathbb{R}^n$ 上の回転不変な計量に関する Caloric morphism の形の決定に関する最近の結果について述べます.