東工大談話会　ベロネーゼ部分環が多項式環になる次数付き環について　2004 年 12 月 6 日 (泊　昌孝)

本講演では、今では古典的な結果とも言える 2 次元次数付き UFD の分類定理（森重文）の結果の Demazure 構成の理論による再証明を紹介した後、少し状況を拡張したタイトルにある環の分類をお話します。

可換環論で誰もが習う一意分解整域（UFD) は、良い性質を持つ環の代表です。特異点の局所環が UFD となるのは、２次元特異点について言えば、完備な場合は 正則局所環と E_8 型特異点に限ります。(Brieskorn, Lipman) 状況を、アフィンな場合、例えば次数付き環の頂点に限りますと、UFD になる場合は増えますが、そんな次数付きの２次元特異点についての分類も、 渡辺敬一氏に始まり、 1970 年代には森重文氏によって分類が完成されています。それらは、Brieskorn-Pham 型の擬斉次多項式の重み付き完全交差の特殊なものとしてはっきりと特徴づけらます。2 次元では、これらの次のクラスがどのように分類されるか？というのも、まだ様々な形で問題として残っていると思います。

さて、上で触れました森氏の分類定理の証明では、射影多様体とその上のアンプル直線束から定まる次数付き環に関する因子類群に関する短完全列、そして、ベロネーゼ部分環を取る操作と、因子類群の観察が重要なポイントになります。途中、様々な “分岐 ” が登場しますが、それをうまく “重み付き ” な状況へ反映させます。完全交差な表現に 2 次元の場合至るのは、UFD が 「ベロネーゼ部分環が多項式環になる次数付き環」になることと密接に関連しています。

時代は流れて、その後、次数付き環の直線束による polarized な表示は、全ての正規次数付き環にまで拡張され（Pinkham-Demazure 表現)、有理的なアンプル因子を用いての因子類群の表現などの可換環論的特異点理論は、多くの研究成果を得ました。そして、次数付き環の一般論から森氏の議論をとらえ直してみるのは自然な事のように思えました。私は、渡辺敬一氏共同で調べておりました次数付き環の巡回被覆に関して、Kummer 型の巡回被覆とベロネーゼ部分環から生ずる巡回被覆の対応という問題の中で、重み付き完全交差な UFD の構造定理を再発見することができました (Kodai. Math. J. vol.24. 2001)。

UFD に続く特異点がどう因子類群的に考えられるか？という問題について、自然なものは、因子類群が有限群になるものがあると思います。2 次元完備局所環では、これは有理特異点に相当しますが、次数付きの場合はどうでしょうか？超曲面２次元については、泊ー藤枝は、実際 Orlik-Wagreich の分類表の中でどれが相当するかを分類することができました。実は、今日のタイトルの「ベロネーゼ部分環が多項式環になる次数付き環」は、UFD と 「因子類群が有限群」の中間に位置することがわかります。今回、その特異点を分類することができました。最後に、これらの少し UFD から離れた特異点の分類についてお話をさせていただきます。