微分積分学第一・演習 F クラス(34~40 ユニット)講義

第 14 回(6/18 :木 8:50–10:30)

担当:柴田 将敬(理学院数学系)

本日のテーマ

- Taylor の定理(発展的話題)続き
- 不等式(発展的話題)

定理 17.3 (Taylor の定理)

f は開区間 I 上で $n \in \mathbb{N}$ 回微分可能で $f^{(n)}$ は連続(つまり f は I 上で C^n 級)とする。$a, x \in I$ に対して、

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n}$$

が成り立つ。ここで、$R_n = \displaystyle\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\,dt$ である。

補足 17.4

- R_n は剰余項と呼ばれる。積分を使わない表示も良く知られている。(教科書 p.45 定理 4)
- $\lim_{x \to a}(R_n(x) - f^{(n)}(a)(x-a)^n/n!)/(x-a)^n = 0$ である。

例 17.5

$\alpha \in \mathbb{R}$ は定数とする。

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1} \quad (x \in \mathbb{R}),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2} \quad (x \in \mathbb{R}),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1} \quad (x \in \mathbb{R}),\\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + R_{n+1} \quad (|x| < 1),\\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1} \quad (|x| < 1),\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} + R_{n+1} \quad (|x| < 1),
\end{aligned}
$$

Taylor の定理を証明する。

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n$$

$$R_n = \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\,dt$$

を示したい。$n = 1$ の場合は、微分積分学の基本定理より、

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt = f(a) + R_1$$

となり、成立。
f が C^{n+1} 級で、n で成立すると仮定すると、部分積分により、

$$R_n = \left[\frac{-(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)\right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_{n+1}.$$

従って、数学的帰納法により Taylor の定理が証明される。 □

$f^{(n)}$ が連続であるとき、$\lim_{x\to a}(R_n - f^{(n)}(a)(x-a)^n/n!)/(x-a)^n = 0$

を示す。

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a)\,dt = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

である。また、

$$M(x) = \max_{a\le t\le x} |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)|$$

とおくと、$M(x) \to 0$ $(x\to a)$ である。以上より、

$$\left| R_n - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right| \le \left| \int_a^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!} M(x)\,dt \right| = \frac{|x-a|^n}{n!} M(x)$$

となる。従って、

$$\frac{1}{|x-a|^n} \left| R_n - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right| \le \frac{M(x)}{n!} \to 0 (x\to a).$$

□

補足 17.6

前の結果から、$\dfrac{R_n}{(x-a)^{n-1}} \to 0 \ (x \to a)$ も示せる。

説明は略。

例 17.7

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=-\frac{1}{3}.$$

$\sin x$ に対して Taylor の定理や補足などを使えば、

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+R_4$$

となる。そして、$R_4/x^3 \to 0\ (x\to 0)$ がわかる。あとは計算すれば、

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x}=\frac{(x-x^3/6+R_4)^2-x^2}{x^2(x-x^3/6+R_4)^2}$$
$$=\frac{-1/3+x^2/36+R_4^2/x^4+2R_4/x^3-R_4/3x}{(1-x^2/6+R_4/x)^2}$$

となる。$R_4/x = x^2R_4/x^3 \to 0$, $R_4/x^2 = xR_4/x^3 \to 0$ であるから、極限をとれば、

$$\frac{-1/3+x^2/36+R_4^2/x^4+2R_4/x^3-R_4/3x}{(1-x^2/6+R_4/x)^2}\to -\frac{1}{3}\ (x\to 0).$$

□

例 17.8

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

e^x に対して Taylor の定理を使って、各 x を固定すると $R_n \to 0$ $(n \to \infty)$ が示せるので、

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

となっている。$x = -t^2$ とおくと、

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} \quad (t \in \mathbb{R})$$

がわかる。これを使うと、

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}\,dt$$

がわかる。ここで、無限和と積分の順序交換は、級数の性質を使うと正当化できる。

あとは計算すれば、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

を得る。 □

第 18 節 不等式(発展的話題)

目標

相加相乗平均の関係など、代表的な不等式について学ぶ。

これまでの講義でもしばしば利用してきた。
不等式の主な利用法としては、

- 大まかな評価によって不要な情報をそぎ落とす。
- 最大値や最小値の証明に使う。

のニつがある。

ここでは、いくつかの有名な不等式を紹介する。

例 18.1

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| \leq \frac{|x|^5}{5!}.$$

このことから、$\sin x$ は $x - x^3/6$ で近似され、誤差は高々 $|x|^5/5!$ であることがわかる。

証明: Taylor の定理より

$$\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = R_5$$

であるから、

$$R_5 = \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\left(\frac{d^5}{dt^5}\sin t\right) dt$$

を評価すれば良い。

$$\left|\frac{d^5}{dt^5}\sin t\right| = \left|\sin\left(t + \frac{5\pi}{2}\right)\right| \leq 1$$

を用いて評価すれば、

$$|R_5| \leq \left|\int_0^x \frac{|x-t|^4}{4!}\,dt\right| = \frac{|x|^5}{5!}$$

がわかる。 □

例 18.2

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ の最小値は 2.

相加相乗平均の関係より、

$$f(x) \geq 2\sqrt{x\frac{1}{x}} = 2$$

となる。これは、f の最小値が(あれば) 2 以上であることを意味する。
また、等号成立の条件は $x = 1/x$ であるから、$x = 1$ として

$$f(1) = 2$$

がわかる。これは、最小値が(あれば) 2 以下であることを意味する。
以上より、最小値が(あれば) 2 であることがわかる。実際に $f(1) = 2$ だから、2 は最小値である。□

補足 18.3

問題と不等式の使い方によっては、最小値(最大値)が上手く求まるとは限らない。

例えば、

$$f(x) = x + \frac{2}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2} \quad (x > 0)$$

の場合、

$$f(x) \geq 2\sqrt{x\frac{2}{x}} + 2\sqrt{x^2\frac{1}{x^2}} = 2\sqrt{2} + 2 = 4.82843\ldots$$

がわかる。だから最小値が(あれば) $2\sqrt{2} + 2$ 以上である。しかし、これは最小値にはなっていない。
最小値は具体的には表しにくいが、数値的に求めると、

$x = 1.09514\ldots$ のとき $f(x) = 4.95452\ldots > 4.82843\ldots$

である。
このように、不等式による評価は、あくまで一方向の評価である。

定義 18.4

$\mathbb{R}$ の区間 I と $f : I \to \mathbb{R}$ を考える。

$$\boxed{f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y) \quad (x, y \in I, t \in [0,1])}$$

が成り立つとき、f は(下に)凸であるという。

$$\boxed{f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y) \quad (x, y \in I, x \neq y, t \in (0,1))}$$

が成り立つとき、f は(下に)狭義凸であるという。

補足 18.5

- 狭義凸ならば凸である。
- I 上で $f''(x) \geq 0$ $(x \in I)$ ならば凸、$f''(x) > 0$ $(x \in I)$ ならば狭義凸となる。
- 凸であるためには、f の連続性や微分可能性が無くても良い。

凸: covnex, 狭義凸: strictly convex

定理 18.6 (Jensen の不等式)

$\boldsymbol{I}$ を $\mathbb{R}$ の区間、$\boldsymbol{f : I \to \mathbb{R}}$ は凸関数とする。
$\boldsymbol{x_1, \ldots x_n \in I}$, $\boldsymbol{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (0,1)}$, $\boldsymbol{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1}$ であるとき、

$$\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)}$$

が成り立つ。
さらに、$\boldsymbol{f}$ が狭義凸で、等号が成立するならば、$\boldsymbol{x_1 = \cdots = x_n}$ である。

補足 18.7

$\boldsymbol{n = 2}$ の時は、凸や狭義凸の定義からすぐに従う。

定理 18.8 (Young の不等式)

$p, q \in (1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$ とする。

$a, b \geq 0$ に対して

$$\boxed{ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}$$

が成り立つ。等号成立は $a^p = b^q$ のとき。

$a, b > 0$ で確かめれば良い。
$f(x) = -\log x$ は $f''(x) = 1/x^2 > 0$ であるので、$(0, \infty)$ 上で凸。
Jensen の不等式を用いれば、

$$f(ta^p + (1-t)b^q) \leq tf(a^p) + (1-t)f(b^q).$$

$t = 1/p$ とおいて計算すれば良い。

計算すると、

$$-\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \leq -\log(ab)$$

となり、

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

を得る。 □

定義 18.9 (相加平均)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$\boxed{\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}}$$

を $a_1, \ldots, a_n$ の<u>相加平均</u>という。

定義 18.10 (相乗平均)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_1, \ldots a_n \geq 0$ に対して

$$\boxed{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}$$

を $a_1, \ldots, a_n$ の<u>相乗平均</u>という。

相加平均: arithmetic mean, 相乗平均: geometric mean

定理 18.11 (AM-GM 不等式)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_1, \ldots a_n \geq 0$ に対して

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

が成り立つ。等号成立は $a_1 = \cdots = a_n$ のとき。

$f(x) = -\log x$ は狭義凸である。Jensen の不等式を使うと、

$$-\log\left(\frac{1}{n}a_1 + \cdots + \frac{1}{n}a_n\right) \leq -\frac{1}{n}\log a_1 - \cdots - \frac{1}{n}\log a_n$$

を得る。このことから、AM-GM 不等式が従う。

定義 18.12

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $r \neq 0$, $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ に対して、

$$\boxed{M_r(a_1, \ldots, a_n) = \left(\frac{a_1^r + \cdots + a_n^r}{n} \right)^{1/r}}$$

は累乗平均と呼ばれる。

補足 18.13

$r = 1$ は相加平均、$r = -1$ は調和平均である。

調和平均: harmonic mean

定理 18.14 (AM-GM 不等式の一般化)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $-\infty \leq r < s \leq \infty$, $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ に対して、

$$M_r(a_1, \ldots, a_n) \leq M_s(a_1, \ldots, a_n)$$

が成り立つ。等号成立は $a_1 = \cdots = a_n$ のとき。
ただし、
$M_0(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$,
$M_\infty(a_1, \ldots, a_n) = \max\{a_1 \cdots a_n\}$,
$M_{-\infty}(a_1, \ldots, a_n) = \min\{a_1 \cdots a_n\}$ とする。

補足 18.15

重み $w_1, \ldots, w_n > 0$ を用いて平均を一般化した

$$M_r(a_1, \ldots, a_n) = \left(\frac{w_1 a_1^r + \cdots + w_n a_n^r}{w_1 + \cdots + w_n} \right)^{1/r}$$

を考えても、上記の不等式は成り立つ。

定理 18.16 (Cauchy-Schwarz の不等式)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\boxed{(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n) \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}}$$

が成り立つ。等号成立はベクトル $(a_1, \ldots, a_n)$ と $(b_1, \ldots, b_n)$ が平行であるとき。

いろいろな証明が知られており、2 次方程式の判別式を使う証明が簡単で有名だが、違う証明を紹介する。

$$A = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}, \quad B = \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$$

とおく。AM-GM 不等式より、

$$\frac{a_i}{A}\frac{b_i}{B} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a_i^2}{A^2} + \frac{b_i^2}{B^2}\right)$$

が成り立つ。

i に関して和をとると、

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A}\frac{b_i}{B} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{a_i^2}{A^2} + \frac{b_i^2}{B^2}\right) = 1$$

となっている。これを整理すれば、

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq AB$$

となる。 □

有名な不等式をいくつか挙げたが、他にも、Bernoulli の不等式、Hölder の不等式、Minkowski の不等式、Gronwall の不等式、Sobolev の不等式、rearrangement 不等式、等周不等式・・・さらにはそれらの一般化などなど、簡単なものから複雑で難しいものまで、数学の様々な分野で様々な不等式が使われている。

もちろん、ある関数の最大値・最小値を求めることは、その関数が満たす(ある意味で最良の)不等式を作ることに他ならないのであった。

ここでは、最後に参考文献を二つ挙げて終わりにする。

大関清太 著「不等式 (数学のかんどころ 9)」共立出版

お手軽に教養$+\alpha$の不等式について知りたい人向け。
次に挙げるのは、本格的に不等式の世界に触れてみたい(?)人向け。

Hardy, Littlewood, Pólya 著「Inequalities (Cambridge Mathematical Library) 2nd ed.」Cambridge University Press

ハーディ、リトルウッド、ポーヤ 著「不等式」丸善出版(日本語訳)

URL をチャットに書き込みます。各自回答して下さい。

質疑応答で出た質問とその答えです。

- 後期の微積はどのような内容に触れるのですか?
  ⟶ 扱うべき内容は、後期のシラバス(下記)を見て下さい。前期はあまり触れられなかった理論的な側面を学ぶことと、(多変数を含む) Taylor の定理・極値・級数を学ぶというのがおおざっぱな内容です。
  第 1 回: 実数の連続性, 上限, 下限
  第 2 回: 数列の極限, 単調列, コーシー列
  第 3 回: 一変数関数の極限, 連続性, 最大値, 中間値の定理
  第 4 回: 微分, 平均値の定理, 不定形の極限
  第 5 回: テイラーの定理, 極値
  第 6 回: 定積分
  第 7 回: 平面上の点集合, 点列
  第 8 回: 多変数関数の極限, 連続性
  第 9 回: 多変数関数の微分, 全微分と偏微分
  第 10 回: 多変数のテイラーの定理, 極値
  第 11 回: 級数, 絶対収束, 条件収束
  第 12 回: 関数列
  第 13 回: 関数項級数, べき級数

- 「広義凸」という言い方はしますか
  $\longrightarrow$「狭義凸ではない」ということを強調するときは言うかもしれません。ただ、聞いた記憶はあまりないです。英語だと、凸は convex, 狭義凸は strictly convex という使い分けがかなり浸透している気がします。
- $y = x$ も下に凸という解釈で大丈夫ですか?
  $\longrightarrow$ 良いです。1 次関数は凸関数になります。
- 期末レポートみたいなものはないですか
  $\longrightarrow$ ありません。
- 調和平均はいつ使いますか、図形的意味はありますか
  $\longrightarrow$ wikipedia の調和平均の項に解説があるので参照してみて下さい。