微分積分学第一・演習 F クラス(34~40 ユニット)講義

第 13 回(6/16 : 火 10:45–12:25)

担当:柴田 将敬(理学院数学系)

本日のテーマ

- 多変数関数の最大値・最小値(発展的話題)
- Taylor の定理(発展的話題)

第 16 節 多変数関数の最大値・最小値

目標

多変数関数でどのように最大値・最小値を求めるかを考える。

与えられた関数の最大値や最小値を求めるというのは、微分積分学の基本的な応用の一つである。

最大値・最小値の求め方(1 変数関数)

f は有界閉区間 $[a,b]$ 上で定義された連続関数で、開区間 (a,b) で微分可能とする。このとき、f が最大値・最小値をとる点は、端点と (a,b) 上の f の臨界点に限られる。

これは、内部で最大値・最小値をとれば、そこは臨界点となることが理由である。
実際、$x_0 \in (a,b)$ で最大値を取るなら、$h > 0$ に対して

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 0, \quad \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} \ge 0$$

となる。$h \to 0$ とすると、

$$f'(x_0) \le 0, \quad f'(x_0) \ge 0,$$

なので、x_0 は臨界点。最小値のときも同様。 □

多変数関数でもこの状況は同じこととなる

定義 16.1 (臨界点)

U は $\mathbb{R}^2$ の開集合、$f(x,y): U \to \mathbb{R}$ は C^1 級、$(a,b) \in U$ とする。

$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ であるとき、(a,b) を f の臨界点という。

定理 16.2

U は $\mathbb{R}^2$ の開集合、$f(x,y): U \to \mathbb{R}$ は C^1 級、$(a,b) \in U$ とする。

f が (a,b) で最大値か最小値を取るなら、(a,b) は f の臨界点となる。

証明:
(a,b) で最大値となるとき、$x \mapsto f(x,b)$ は $x = a$ で最大値をとるから、$f_x(a,b) = 0$.
同様に $f_y(a,b) = 0$ もわかる。最小値を取るときも同様。 □

臨界点: critical point

最大値・最小値の求め方(2 変数関数)

f は有界閉集合 D 上で定義された連続関数で、その内部 U (D の内点全体のこと)上で微分可能とする。このとき、f が D 上で最大値・最小値をとる点は、境界上の点か、U 上の臨界点に限られる。

この主張は正しいわけだが、1 変数の場合と異なり、境界と一言で言っても、それは有限個の点ではないので、一つ一つの点での値を具体的に代入して比較することが出来ない。なので、境界上での最大値・最小値を求めるためには、もう一工夫が必要である。

例 16.3

有界閉集合 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 上で C^1 級な関数 f (D を含む開集合上で C^1 級な関数のこと)の最大値・最小値を求めよ。

先に述べたように、次の手順で計算すれば良い。

- $U: x^2 + y^2 < 1$ 上で f の臨界点を求め、そこでの値を具体的に計算する(最大値・最小値の候補となる)。
- 境界 $x^2 + y^2 = 1$ 上で f の最大値・最小値を求める。
- 上記で求めた値を全て比較し、一番大きいものが最大値、一番小さいものが最小値。

では、境界上ではどのようにするか?

答えは簡単。

境界を具体的にパラメータで表せば良い。

実際、パラメータ t を用いて $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ を考えると、これは $x^2 + y^2 = 1$ 全体を滑らかに動いている。

なので、$\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $g(t) := f(\cos t, \sin t)$ の最大値・最小値は、f の $x^2 + y^2 = 1$ 上での最大値・最小値に一致する。

従って、g の臨界点を求めればそれで十分である。(さらに、周期性から、$t \in [0, 2\pi)$ で十分である。)

境界での最大値・最小値の求め方

境界上の点をパラメータ t を用いて $(x(t), y(t))$ として表し、合成関数 $g(t) := f(x(t), y(t))$ の臨界点を求めれば良い。

具体的にパラメータで表せないときはどうしたら良いか?その時に使える方法が、Lagrange の乗数法である。

定理 16.4 (Lagrange の乗数法(教科書 p.178 定理 15))

f, ϕ を $\mathbb{R}^n$ 上の C^1 級関数とする。
$A := \{x \in \mathbb{R}^n; \phi(x) = 0\}$ とし、A 上で考えるとき f が $a \in A$ で最大値･最小値をとると仮定する。

このとき、$\phi'(a) \neq 0$ ならば、

$$\boxed{f'(a) = \lambda \phi'(a)}$$

をみたすような $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する。

系

f, ϕ を $\mathbb{R}^n$ 上の C^1 級関数とする。
$A := \{x \in \mathbb{R}^n; \phi(x) = 0\}$ とし、A 上で f の最大値・最小値を考える。

このとき、a と λ を未知数とする方程式

$$\begin{cases} f'(a) = \lambda \phi'(a), \\ \phi(a) = 0 \end{cases}$$

の解と、a を未知数とする方程式

$$\begin{cases} \phi'(a) = 0, \\ \phi(a) = 0 \end{cases}$$

の解が、最大値・最小値を取る点の候補となる。

補足 16.5

最大値・最小値があれば、上記が候補の全てである。A が有界でないときは、最大値や最小値が無いこともありうる。

簡単のため、$n=2$ として Langrange の乗数法の証明をする。

定理 16.6 (Lagrange の乗数法(教科書 p.178 定理 15))

f, ϕ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数とする。
$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \phi(x,y)=0\}$ とし、A 上で考えるとき f が $(a,b) \in A$ で最大値･最小値をとると仮定する。

このとき、$(\phi_x(a,b), \phi_y(a,b)) \neq (0,0)$ ならば、

$$\boxed{(f_x(a,b), f_y(a,b)) = \lambda(\phi_x(a,b), \phi_y(a,b))}$$

をみたすような $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する。

A が、(a,b) の近くでは、パラメータを用いて $(x(t), y(t))$ で表されており、
$(x(0), y(0)) = (a,b)$, $(x'(0), y'(0)) \neq (0,0)$ を満たすとして証明を始める。

補足 16.7

そのようなパラメータ表示を持つための十分条件が $\phi'(a,b) \neq (0,0)$ である。そして、パラメータ表示が出来ことを保証する定理は、陰関数定理である。

証明: $t \mapsto f(x(t), y(t))$ が $t = 0$ で最大値・最小値を取ることから、

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \Big|_{t=0} = f_x(a,b)x'(0) + f_y(a,b)y'(0) = 0$$

つまり、

$$f'(a,b) \cdot (x'(0), y'(0)) = 0$$

であり、$f'(a,b)$ は $(x'(0), y'(0))$ と直交している。一方、$(x(t), y(t))$ は A のパラメータ表示だから、

$$\phi(x(t), y(t)) \equiv 0$$

である。したがって、

$$\frac{d}{dt} \phi(x(t), y(t)) \Big|_{t=0} = 0$$

であり、上と同様に、

$$\phi'(a,b) \cdot (x'(0), y'(0)) = 0$$

を得る。

ここで $\phi'(a,b)$ や $(x'(0),y'(0))$ は零ベクトルではないから、$f'(a,b)$ と $\phi'(a,b)$ は平行であり、

$$f'(a,b) = \lambda\phi'(a,b)$$

となる λ が存在する。 □

例 16.8

$\alpha < \beta < \gamma$ とする。$\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ 上で、$f(x,y,z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$ の最大値・最小値を求めよ。

(x,y,z) で f が最大値・最小値をとるとする。Lagrange の乗数法より、(x,y,z) は

$$\boxed{\mathrm{I}}\ \begin{cases} \phi'(x,y,z) = (0,0,0), \\ \phi(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

を満たすか、ある $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\boxed{\mathrm{II}}\ \begin{cases} f'(x,y,z) = \lambda\phi'(x,y,z), \\ \phi(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

を満たす。$\boxed{\mathrm{I}}$ は、

$$\boxed{\mathrm{III}}\ (2x, 2y, 2z) = (0,0,0), \qquad \boxed{\mathrm{IV}}\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

の意味だから、$\boxed{\mathrm{III}}$ より $x = y = z = 0$ であり、$\boxed{\mathrm{IV}}$ を満たさない。つまり、$\boxed{\mathrm{I}}$ は解を持たない。

ある $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、$\boxed{\text{II}}$ を満たすとする。このときは、

$$\boxed{\text{V}}\ \alpha x = \lambda x, \quad \boxed{\text{VI}}\ \beta y = \lambda y, \quad \boxed{\text{VII}}\ \gamma z = \lambda z, \quad \boxed{\text{IV}}\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

が従う。$\lambda \neq \alpha, \beta, \gamma$ の場合、$\boxed{\text{V}}$–$\boxed{\text{VII}}$ より、$x = y = z = 0$ となるが、これは $\boxed{\text{IV}}$ を満たさない。
つまり、λ は α, β, γ のいずれかに等しい。

$\lambda = \alpha$ とすると、$\boxed{\text{VI}}$, $\boxed{\text{VII}}$ より $y = z = 0$ で、$\boxed{\text{IV}}$ より $x = \pm 1$ となる。これは $\boxed{\text{II}}$ の解。

$\lambda = \beta, \gamma$ も同様にすると、結局、

$$(x, y, z, \lambda) = (\pm 1, 0, 0, \alpha), (0, \pm 1, 0, \beta), (0, 0, \pm 1, \gamma)$$

が解である。以上をまとめると、最大値・最小値を与える点の候補は、

$$(x, y, z) = (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$$

に限られる。値を比較すれば、

$$(\pm 1, 0, 0) \text{ で最小値 } \alpha, \quad (0, 0, \pm 1) \text{ で最大値 } \gamma$$

を得る。 □

非有界な集合、例えば、$\mathbb{R}^n$ 全体で定義された関数の最大値・最小値を求める問題を考える。

定義 16.9

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を考える。

任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して、$\{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \leq c\}$ が有界集合であるとき、f は強圧的という。

補足 16.10

$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty \iff f$ は強圧的。

強圧的: coercive

定理 16.11

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が強圧的、連続ならば、f は $\mathbb{R}^n$ 上で最小値を持つ。
さらに、f が C^1 級であれば、f の臨界点が最小点の候補となる。

証明:

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \leq f(0)\}$$

は $0 \in A$ なので空集合ではなく、f が強圧的だから有界であり、f が連続なので閉集合である。
従って、A 上で f は最小値 m をとる。$f(x_0) = m$ とすると、$m \leq f(0)$ となっている。
ここで、

$$m \leq f(x)\ (x \in A), \quad m \leq f(0) < f(x)\ (x \notin A)$$

となっているから、m は $\mathbb{R}^n$ 上での f の最小値であることがわかる。 □

例 16.12

$\mathbb{R}^2$ 上で $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$ を考えると、最小値は -2

まず、強圧的となっていることを確認する。$|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty$ であるとき、$f(x,y) \to \infty$ となっていることが分かれば良い。
相加相乗平均の関係 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ $(a, b \geq 0)$ を用いて、f を下から評価する。

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = x^4 + 4 - 4xy + y^4 + 4 - 8 \geq 2\sqrt{4x^4} + 2\sqrt{4y^4} - 4xy - 8 \\
&= 4x^2 + 4y^2 - 4xy - 8 = 2(x^2 + y^2) + 2(x-y)^2 - 8 \\
&\geq 2(x^2 + y^2) - 8
\end{aligned}
$$

となるから、$\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$ のとき、$f(x,y) \to \infty$ となることがわかる。従って、$f(x,y)$ は強圧的である。

さて、f は強圧的で C^1 級であるから、臨界点で最小値をとる。臨界点を求めると、

$$f_x = 4(x^3 - y) = 0,\ f_y = 4(y^3 - x) = 0$$

より、$x = 0$ ならば $y = 0$。
$x \neq 0$ ならば

$$x = y^3 = x^9$$

となり、$x = \pm 1 = y$ を得る。従って、臨界点は

$$(0, 0),\ (1, 1),\ (-1, -1)$$

の 3 点。f の値は

$$f(0, 0) = 0,\ f(1, 1) = f(-1, -1) = -2$$

であるから、最小値は 2. □

第 17 節 Taylor の定理(発展的話題)

目標

Taylor の定理により、関数を多項式で近似する方法を学ぶ。

与えられた関数を、多項式などより分かりやすい関数で表す・近似するというのは、様々な状況で便利である。

Fourier 級数

関数 $f(x)$ を三角関数や多項式の和で近似したり無限和で表したりする。

与えられた有界区間 $[a, b]$ で、ある意味、平均的に誤差が小さくなるように近似する。

いわゆる「Fourier 解析」である。

多項式補完

与えられた $(a_0, b_0), \ldots, (a_n, b_n)$ に対して、$f(a_i) = b_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ となる n 次多項式を求める。

「数値解析」の本で扱われる。

ここでは、Taylor の定理による近似を紹介する。

定理 17.1 (Taylor の定理)

f は開区間 I 上で $n \in \mathbb{N}$ 回微分可能で $f^{(n)}$ は連続(つまり f は I 上で C^n 級)とする。$a, x \in I$ に対して、

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n}$$

が成り立つ。ここで、$R_n = \displaystyle\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\,dt$ である。

補足 17.2

- R_n は剰余項と呼ばれる。積分を使わない表示も良く知られている。(教科書 p.45 定理 4)
- $\lim_{x\to a}(R_n(x) - f^{(n)}(a)/n!)/(x-a)^n = 0$ である。

Taylor の定理より、

2 次近似

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \quad (x \to a)$$

のように、a の近くで f を多項式で近似することが出来る。(次数が高くなれば、より良い近似になる。)

また、$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ が成り立つなら、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

のように、関数を無限和で表すことも出来る。

質疑応答で出た質問とその答えです。

- 強圧的の図形的イメージはありますか?
  $\longrightarrow$ $|(x,y)|$ が大きくなると $f(x,y)$ はどんどん大きくなるという感じ。
- 強圧的な関数は変数を無限に飛ばしてfが∞に発散するという認識で正しいでしょうか
  $\longrightarrow$ 良いと思います。$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty$ と強圧的が同値です。
- (p.347 の説明で)ルートをつけるのには何か特別な意味があったりしますか?
  $\longrightarrow$ $\sqrt{x^2+y^2} = |(x,y)| \to \infty$ なのでルートをつけてます、ただ、$x^2+y^2 = |(x,y)|^2 \to \infty$ と $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$ は同値なので、$x^2+y^2 \to \infty$ として考えても同じです。