微分積分学第一・演習 F クラス(34~40 ユニット)講義

第 12 回(6/11 :木 8:50–10:30)

担当:柴田 将敬(理学院数学系)

本日のテーマ

- 重積分の応用
- 積分記号下の微分(発展的話題)

第 14 節 重積分の応用

目標

曲線の長さや曲面の面積について学ぶ。

$\mathbb{R}^3$ 内の集合として表される物体 V を考える。

$$\rho(x,y,z) := \lim_{r\to 0+} \frac{(B_r(x,y,z)\cap V)\text{の質量}}{B_r(x,y,z)\text{の体積}}$$

を V の (x,y,z) における<u>密度</u>という。このとき、V の質量は

$$M = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dxdydz$$

で表される。そして、次で定義される $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ を<u>重心</u>という。

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iiint_V x\rho(x,y,z)\,dxdydz,\ \overline{y} = \frac{1}{M}\iiint_V y\rho(x,y,z)\,dxdydz,$$
$$\overline{z} = \frac{1}{M}\iiint_V z\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

物体が二次元的なもの(薄い板など)で、$D\subset\mathbb{R}^2$ で表されるときは、3 重積分の代わりに重積分を用いて、同様に、重心などが定義される。

定義 14.1 (曲線の長さ)

$[a,b]$ を $\mathbb{R}$ の有界閉区間とし、$[a,b]$ 上の C^1 級関数 $x(t)$, $y(t)$ に対して、「曲線」

$$C := \{(x(t), y(t)); t \in [a,b]\}$$

を考える。
また、写像 $t \mapsto (x(t), y(t))$ は、有限個の点を除いて、$[a,b]$ 上で単射であるとする。

このとき、

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

を C の長さという。

長さ: length

補足 14.2

この定義が妥当な定義になっているかどうかは別途考慮しなければならない。例えば、

- C は同じものなのに、パラメータが違うと長さが変化するようなことは無いか?
- 線分の長さなど、これまで定義されている長さと一致しているか?

パラメータに依存しないこと

定義の曲線を考える。
$\phi(s) : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ が C^1 級、単調増加、$\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$ とする。
$\tilde{x}(s) = x(\phi(s))$ $\tilde{y}(s) = y(\phi(s))$ とおくと、$C = \{(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)); s \in [\alpha, \beta]\}$ となっている。

このとき、

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(\tilde{x}'(s))^2 + (\tilde{y}'(s))^2}\, ds = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

である。つまり、パラメータ s を用いても曲線の長さは同じになる。

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(\tilde{x}'(s))^2 + (\tilde{y}'(s))^2}\,ds = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

左辺を ϕ を用いて表すと、合成関数の微分法より、

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(\phi(s)))^2(\phi'(s))^2 + (y'(\phi(s)))^2(\phi'(s))^2}\,ds$$

となる。あとは、$\phi(s) = t$ と置いて置換積分すれば、右辺と等しいことがわかる。 □

例 14.3

(a, b) と (c, d) を結ぶ線分の長さは $\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$ である。

線分は、$(x(t), y(t)) = (a+(c-a)t, b+(d-a)t)$ の、t が 0 から 1 まで動くときの像として表される。あとは、定義に従って計算すれば良い。 □

例 14.4

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする。
$\{(\cos t, \sin t); 0 \leq t \leq \theta\}$ の長さは θ である。

円弧は、$(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ の、t が 0 から θ まで動くときの像として表される。あとは、定義に従って計算すれば良い。 $\square$

定義 14.5 (空間曲線の長さ)

$[a,b]$ を $\mathbb{R}$ の有界閉区間とし、$[a,b]$ 上の C^1 級関数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ に対して、「曲線」

$$C := \{(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3 ; t \in [a,b]\}$$

を考える。
また、写像 $t \mapsto (x(t), y(t))$ は、有限個の点を除いて、$[a,b]$ 上で単射であるとする。

このとき、

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

を C の長さという。

定義 14.6

D を $\mathbb{R}^2$ の単純な有界閉集合、D 上の C^1 級関数 $x(s,t)$, $y(s,t)$, $z(x,t)$ に対して、「曲面」

$$S := \left\{(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) \in \mathbb{R}^3 ; (s,t) \in D\right\}$$

の面積は

$$\iint_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}(s,t) \right| dsdt$$

で定義される。
ただし、$\Phi(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ であり、
Φ は D の境界を除いて、D 上で単射、$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}(s,t) \right| \neq 0$ とする。

補足 14.7

上記の定義はパラメータの取り方に依らないことなども知られている。

例 14.8

$\mathbb{R}^2$ の単純な有界閉集合 D と、D 上の C^1 級関数 $f(x,y)$ に対して、$z = f(x,y)$ のグラフの面積は

$$\boxed{\iint_D \sqrt{1 + (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2}\, dxdy}$$

となる。

求める曲面は、$\Phi(x,y) = (x, y, f(x,y))$ の、(x,y) が D を動くときの像である。従って、

$$|\Phi_x \times \Phi_y|^2 = 1 + (f_x)^2 + (f_y)^2$$

が示せれば良い。偏微分と外積を計算すれば、

$$\Phi_x = (1, 0, f_x), \quad \Phi_y = (0, 1, f_y), \quad \Phi_x \times \Phi_y = (-f_x, -f_y, 1)$$

となるので、

$$|\Phi_x \times \Phi_y|^2 = (f_x)^2 + (f_y)^2 + 1$$

を得る。 □

例 14.9

$\mathbb{R}^3$ の単位球の表面積は 4π.

極座標を用いれば、球面は、$D: 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi$ の
$\Phi(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ による像になっている。偏微分と外積を計算すれば、

$$\Phi_\theta = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta), \quad \Phi_\phi = (-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0),$$
$$\Phi_\theta \times \Phi_\phi = (\sin^2\theta\cos\phi, \sin^2\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\theta)$$

となっているから、

$$|\Phi_\theta \times \Phi_\phi| = |\sin\theta| = \sin\theta$$

である。重積分を計算すれば、

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\phi = 4\pi$$

が分かる。 □

$\mathbb{R}$ の有界閉区間 $[a,b]$ と $[a,b]$ 上の C^1 級関数 f を考える。

f は $[a,b]$ 上で $f>0$ を満たしているとき、$y=f(x)$ のグラフを x 軸中心に回転させせて出来る回転体の面積は

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

体積は

$$\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

となる。(体積については f は連続で良い。)

求める曲面は、$D: a \leq x \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ の $\Phi(x,\theta) = (x, f(x)\cos\theta, f(x)\sin\theta)$ による像になっている。偏微分と外積を計算すれば、

$$\Phi_x = (1, f'\cos\theta, f'\sin\theta), \quad \Phi_\theta = (0, -f\sin\theta, f\cos\theta),$$
$$\Phi_x \times = (ff', -f\cos\theta, -f\sin\theta)$$

となっているから、

$$|\Phi_x \times \Phi_\theta| = |f|\sqrt{1+(f')^2} = f\sqrt{1+(f')^2}$$

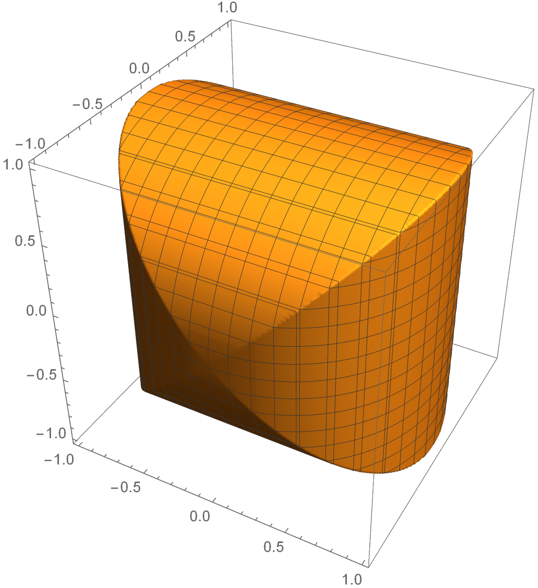
である。重積分を計算すれば、

$$\int_a^b dx \int_0^{2\pi} f\sqrt{1+(f')^2}\, d\theta = \int_a^b 2\pi f\sqrt{1+(f')^2}\, dx$$

が分かる。 □

体積については略。

円柱の共通部分 $x^2 + y^2 \leq 1,\ y^2 + z^2 \leq 1$ の図。



第 15 節 積分記号下の微分

目標

積分を用いて表されている関数の微分について紹介する。

二つの極限(微分や積分を含む)の順序を交換するというのは、応用上しばしば出てくるわりに、きちんと正当化するのが面倒である。
Riemann 積分において、その順序交換を正当化するための重要な概念が「一様収束」である。
さらに、順序交換が出来ることを保証するための使いやすい条件を提供するためには、Lebesgue 積分が用いられる。

大雑把にいって、Riemann 積分可能な関数 f_n の極限は Riemann 積分可能とは限らないが、Lebesgue 積分可能な関数の極限は Lebesgue 積分可能であり、Lebesgue 積分の方が極限操作に強い。

例えば、Dirichlet 関数は Riemann 積分不可能だが、Riemann 積分可能な関数の極限になっている。

例 15.1 (Dirichlet 関数)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\cos^{2k}(n!\pi x)\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

なにはともあれ、積分と積分の順序交換は累次積分の順序交換で学んだ。極限と積分や極限と微分の順序交換については、成立するべき式はわかりやすい。

極限と微分・積分の順序交換(詳しくは教科書 p.142)

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ とする。適切な条件のもと、次が成立する。

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

ここでは、微分と積分の順序交換(積分記号下の微分とも呼ばれる)について学ぶ。成立するべき式は

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$$

である。

考え方は単純で、$F(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$ とおいて、導関数の定義に従って計算すると、

$$F'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^b f(x,t+h)\,dx - \int_a^b f(x,t)\,dx}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\,dx$$

となる。ここで、極限と積分の順序交換が出来れば、

$$= \int_a^b \lim_{h\to 0}\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\,dx = \int_a^b f_t(x,t)\,dx$$

がわかる。 □

未知関数 $u(t,x)$ と与えられた関数 $f(x)$ に対する偏微分方程式

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) & \text{for } (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = f(x) & \text{for } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

は熱方程式と呼ばれる。
ここで、$u(t,x)$ は 1 次元的な物体(真空中の針金など)の時刻 t 場所 x における温度を表し、$f(x)$ は時刻 $t = 0$ における初期状態を表す。

f が有界連続関数であるとき、熱方程式の解は

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, x-y) f(y)\, dy$$

で表される。ただし、$u(0,x) = f(x)$ は $\lim_{t\to 0+} u(t,x) = f(x)$ と解釈する。ここで、

$$K(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

は熱方程式の基本解と呼ばれる。

$u(t,x)$ が解であることを確かめてみる。まず、直接計算すればわかるように、$K_t = K_{xx}$ が成り立つ。なので、

$$\frac{\partial}{\partial t}K(t,x-y) = K_t(t,x-y) = K_x(t,x-y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}K(t,x-y)$$

となっている。なので、積分記号下の微分が出来るとすると(きっちりやるためには、これが可能かどうかチェックしなければならない)、

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} K(t,x-y)f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}K(t,x-y)f(y)\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}K(t,x-y)f(y)\,dy = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty} K(t,x-y)f(y)\,dy = u_{xx}$$

となって、方程式を満たしていることがわかる。

また、初期条件については、$z = (y-x)/\sqrt{4t}$ と変数変換すると、

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} f(x+\sqrt{4t}z)\,dz$$

となっていることから、極限と積分の順序交換が出来れば、

$$\lim_{t\to 0+} u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t\to 0+} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} f(x+\sqrt{4t}z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} f(x)\,dz = f(x)$$

となることがわかる。 □

このように、極限と積分の順序交換や微分と積分の順序交換が出来ると、応用上も便利である。

定理 15.2 (積分記号下の微分)

$-\infty < a < b < \infty$, $-\infty < c < d < \infty$ とし、$f(x,t)$ は $[a,b]\times[c,d]$ 上で連続とする。

このとき、$F(t) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)dx$ は $[c,d]$ 上で連続である。

さらに、f_t が $[a,b]\times[c,d]$ 上で連続であれば、次が成立する。

$$\boxed{\frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b f_t(x,t)dx \quad (t \in [c,d]).}$$

補足 15.3

積分が広義積分であるときも、適当な条件下で成立する(教科書 p.249 定理 2)。

微分積分学の基本定理を用いると、

$$f(x,t) = \int_c^t f_t(x,s)\,ds + f(x,c)$$

である。$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,c)\,dx = 0$ に注意して計算すると、

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_a^b \left(\int_c^t f_t(x,s)\,ds + f(x,c)\right)dx = \frac{d}{dt}\int_a^b \left(\int_c^t f_t(x,s)\,ds\right)dx$$

がわかる。f_t は連続であるから、累次積分の順序交換が出来て、(積分範囲が長方形であることにも注意)

$$= \frac{d}{dt}\int_c^t \left(\int_a^b f_t(x,s)\,dx\right)ds = \left(\int_a^b f_t(x,s)\,dx\right)\Bigg|_{s=t} = \int_a^b f_t(x,t)\,dx$$

を得る。ここで、再び微分積分学の基本定理を用いた。 □

より一般的な形は次のようになる。

定理 15.4 (積分記号下の微分)

$-\infty < a < b < \infty$, $-\infty < c < d < \infty$ とし、$f(x,t)$, $f_t(x,t)$ は $[a,b]\times[c,d]$ 上で連続とする。さらに、ϕ, ψ は区間 $I \subset [c,d]$ 上で C^1 級で、その値域は $\phi(I), \psi(I) \subset [c,d]$ を満たすとする。

このとき、$t \in I$ に対して、次が成立する。

$$\frac{d}{dt}\int_{\phi(t)}^{\psi(t)} f(x,t)\,dt = f(x,\psi(t))\psi'(t) - f(x,\phi(t))\phi'(t) + \int_{\phi(t)}^{\psi(t)} f_t(x,t)dx.$$

証明のアイデア

$F(u,v,t) := \displaystyle\int_u^v f(x,t)\,dt$ として、合成関数の微分法や前定理を用いて、

$$\frac{d}{dt}\left(F(\phi(t),\psi(t),t)\right)$$

を計算すれば良い。

例 15.5

$t \geq 0$ に対して、

$$f(x) = \left(\int_0^t e^{-x^2}\, dx \right)^2, \quad g(t) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}\, dx$$ とおく。

(i) $t > 0$ で $f'(t) + g'(t) = 0$ を示せ。

(ii) $f(0) + g(0) = \pi/4$ を示せ。

(iii) $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/2$ を示せ。

なお、f, g の連続性や $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ は用いて良い。

計算は各自確認。

質疑応答で出た質問とその答えです。

- 重心のイメージ的理解はできますか
  $\longrightarrow$ 例えば、二次元的な物体(板状のもの)であれば、重心に糸を結びつけると、物体を傾けずにぶら下げることができます。私からはその程度。物理に関する本や web サイトを参考にしてみて下さい。
- 微積分学の基本定理ってどのようなやつですか?
  $\longrightarrow$ スライドの p.81 を参照して下さい。連続関数にとって、原始関数と不定積分が同じという定理です。
- 回転体の面積を求める際に使った θ はどこの角度ですか?
  $\longrightarrow$ x を固定したとき、回転体は yz 平面上の円を動くので、yz 平面で極座標 $(f(x)\cos\theta, f(x)\sin\theta)$ を使っています。
- 熱方程式の基本解は他の解と比べて何が基本なのですか
  $\longrightarrow$ ある種、一番単純な初期条件に対する解になっているという意味で基本解と呼ばれているのだと思います。ただ、その初期条件の関数は、Dirac の δ 関数と呼ばれるものなので、少し理解しにくいものではあるのですが・・・。
  ちなみに、δ 関数を Fourier 変換すると、1 という定数関数なので、まあ、これが単純だというのは納得できる、かも。