微分積分学第一・演習 F クラス(34~40 ユニット)講義

第 10 回(6/4 :木 8:50–10:30)

担当:柴田 将敬(理学院数学系)

本日のテーマ

- 重積分の変数変換

第 13 節 重積分の変数変換

目標

重積分の変数変換について学ぶ。

定義 13.1

2×2 行列 A に対して、

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc$$

を A の<u>行列式</u>と呼ぶ。

定理 13.2

$\det(AB) = (\det A)(\det B)$ が成り立つ。

具体的に計算すれば示せる。

行列式: determinant

定理 13.3

A が逆行列を持つための必要十分条件が $\det A \neq 0$ になっている。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列 A^{-1} を持つとする。このとき、定理 13.2 より、

$$(ad - bc) \det A^{-1} = \det A \det A^{-1} = \det AA^{-1} = \det I = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

である。従って、$ad - bc \neq 0$.

逆に、$ad - bc \neq 0$ とすると、

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

は A の逆行列である。つまり、逆行列が存在する。 □

定理 13.4

$\mathbb{R}^2$ のベクトル (a,b) と (c,d) の張る平行四辺形の面積は $|ad-bc|$ となる。つまり、ベクトルを並べた行列の行列式の絶対値である。

$X := (a,b)$, $Y := (c,d)$ とおくと、X, Y が張る平行四辺形の面積 S は

$$S = |X|\,|Y|\sin\theta$$

である。ここで、θ は X と Y のなす角。
計算すれば、内積の性質($X \cdot Y = |X|\,|Y|\cos\theta$)より、

$$S^2 = |X|^2|Y|^2(1-\cos^2\theta) = |X|^2|Y|^2 - (X\cdot Y)^2$$

となり、成分で直接計算すると、

$$|X|^2|Y|^2 - (X\cdot Y)^2 = \cdots = (ad-bc)^2$$

を得る。 □

1 変数の積分において、変数変換(置換積分)は次のようなものであった。

g を C^1 級で単調な関数とし、$x = g(t)$ で置換する。t が c から d へ変化するとき、x が a から b へ変化するとする。
このとき、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt$$

が成り立つ。

これに対応することを、重積分でやるのが目的である。

1 変数の時は、証明は不定積分と合成関数の微分法を用いれば良かった。重積分では、不定積分が使えないので、直接示す必要がある。

定理 13.5

変数変換 $x = \phi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ によって、D と Ω が面積 0 の集合を除いて 1 対 1 で対応しているとき、次が成立する。

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Omega f(\phi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|\,dudv.$$

ただし、以下を満たすとする。

- D, Ω は単純な有界閉集合の有限和。
- f は D 上で連続。
- $\Phi : (u,v) \mapsto (\phi(u,v),\psi(u,v))$ は Ω を含む領域で C^1 級。
- $J(u,v) := \dfrac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u,v) - \dfrac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial\psi}{\partial u}(u,v)$.
- 面積 0 の集合を除いて、Ω 上で $J(u,v) \neq 0$.

補足 13.6

$J(u,v) = \det\Phi' = \det\begin{pmatrix}\phi_u & \phi_v \\ \psi_u & \psi_v\end{pmatrix}$ である。これは、Φ のJacobi 行列式と呼ばれる。

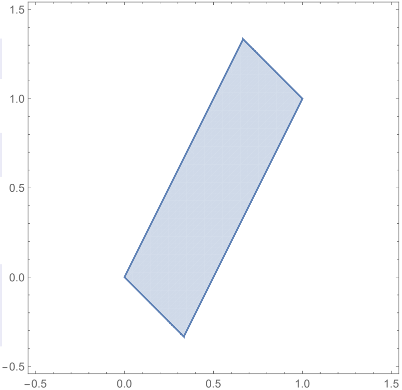
補足 13.7

- 要は、変数変換 $\mathbf{\Phi}$ によって、$\boldsymbol{D}$ と $\mathbf{\Omega}$ が $\mathbf{1}$ 対 $\mathbf{1}$ に対応していれば、変数変換が出来る。
- 同じ部分を二回積分したり、余計な部分を積分したりしないために、$\mathbf{1}$ 対 $\mathbf{1}$ で $\mathbf{\Omega}$ と $\boldsymbol{D}$ が対応していなければならない。
- 変数変換によって伸び縮みする効果が $|\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|$ になっている。
  $\mathbf{1}$ 変数の場合と違って、絶対値が必要。($\mathbf{1}$ 変数の積分では向きを考えているので絶対値が不要。詳しくは教科書 p.203 参照。)

例 13.8

$$\iint_D (x+y)^2 e^{2x-y}\, dxdy \quad D: 0 \le 2x-y \le 1,\ 0 \le x+y \le 2.$$

D は右図。



$$s = 2x - y,\ t = x + y$$

とおくと、

$$x = (s+t)/3,\ y = (-s+2t)/3$$

であり、この変換 $\Phi : (s,t) \mapsto (x,y)$ によって、$[0,1] \times [0,2]$ と D が 1 対 1 に対応していることがわかる。

$$J(s,t) = \det\begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

がわかる。

以上をまとめれば、

$$\iint_D (x+y)^2 e^{2x-y}\,dxdy = \int_0^1 ds \int_0^2 \frac{t^2 e^s}{3}\,dt = \cdots = \frac{8(e-1)}{9}$$

を得る。 □

補足 13.9

$s = ax + by$, $t = cx + dy$ というのは、一次変換である。これは、$ad - bc \neq 0$ のとき、単射であり、直線は直線に、平行四辺形は平行四辺形に写す。

極座標 $x = x(r, \theta) = r\cos\theta$, $y = y(r, \theta) = r\sin\theta$ によって、$\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を定める。
$U := [0, \infty) \times [0, 2\pi)$ とおく。

このとき、

- $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は C^1 級、$\Phi(U) = \mathbb{R}^2$、面積 0 の集合を除けば U と $\mathbb{R}^2$ は 1 対 1 で対応する。
- $J(r, \theta) := \det \Phi'(r, \theta) = r$ であり、面積 0 の集合を除けば U 上で $J > 0$.

となっている。

従って、

- $\Omega \subset U$, $\Phi(\Omega) = D$, D と Ω は有界で単純な閉集合。
- f は D 上で連続。

ならば、

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \iint_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,drd\theta$$

が成り立つ。

例 13.10

$$\iint_D (x^2+y^2)y\,dxdy,\ D: x^2+y^2 \le 4, y \ge x.$$

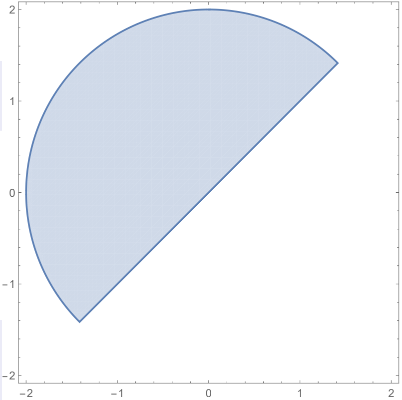
D は右図。
極座標変換を用いると、

$$0 \le r \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{5\pi}{4}$$

と対応する。
$(x,y)=(0,0)$ と対応する $(r,\theta)=(0,\theta)$ を除けば 1 対 1 で、これらは面積 0. また、そこでは $J(r,\theta)=r\neq 0$ でもある。

結局、積分は

$$\int_0^2 dr \int_{\pi/4}^{\pi/5} r^4 \sin\theta\, d\theta = \cdots = \frac{32\sqrt{2}}{5}.$$



$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Omega f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\,dudv.$$

の証明を考える。

簡単のため、$\Omega = [a,b]\times[c,d]$ を仮定する。

Ω の長方形分割を

$\Delta : I_1, \ldots, I_n$

とする、$D_i = \Phi(I_i)$ とおくと、

$\Delta' : D_1, \ldots, D_n$

は D の一般的な分割になっている。また、$|\Delta| \to 0$ のとき、$|\Delta'| \to 0$ となっている。

補足

Φ が C^1 級であること、Ω が有界であること、平均値の定理などから、$|\Delta| \to 0$ のとき、$|\Delta'| \to 0$ が示せる。考え方は後で述べる $|D_i|$ の計算と同じ。
しかしながら、きちんと証明するのはちょっと面倒。

分割 Δ と、$\xi_i \in I_i$ となるような $\{\xi_i\}$ に対して、$\xi_i' = \Phi(\xi_i) \in D_i$ とすると、重積分の性質から、

$$\lim_{|\Delta'|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')|D_i| = \lim_{|\Delta'|\to 0} R(\Delta', \{\xi_i\}) = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

となっている。

$$f(\xi_i')|D_i| = f(\Phi(\xi_i))|\Phi(I_i)|$$

であるから、

$$|\Phi(I_i)| \sim |J(\xi_i)|\,|I_i| \quad (|\Delta|\text{ が小さいと近似が良くなって等号へ近づく})$$

となっていれば、$|\Delta| \to 0$ のときに、

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')|D_i| \sim \sum_{i=1}^{n} f(\Phi(\xi_i))|J(\xi_i)|\,|I_i| \to \iint_\Omega f(\Phi(u,v))|J(u,v)|\,dudv$$

となって、主張が従う。

以後、

$$|\Phi(I_i)| \sim |J(\xi_i)|\,|I_i|$$

を示す。i を固定し、$I_i = [a, a+\delta] \times [b, b+\epsilon]$ とおく。$\xi_i \in I_i$ であれば良かったから、$\xi_i = (a, b)$ とする。単に ξ と書く。そして、I_i の 4 つの頂点を

$$A = (a, b) = \xi,\ B = (a+\delta, b),\ C = (a, b+\epsilon),\ D = (a+\delta, b+\epsilon)$$

とおく。

$$\Phi(A) = (x(a, b), y(a, b))$$

であるが、一次近似

$$x(a+\delta, b) \sim x(a, b) + x_u(a, b)\delta = x(\xi) + x_u(\xi)\delta,\ y(a+\delta, b) \sim y(\xi) + y_u(\xi)\delta$$

ゆえ、

$$\Phi(B) \sim (x(\xi) + x_u(\xi)\delta, y(\xi) + y_u(\xi)\delta) = \Phi(A) + \delta(x_u(\xi), y_u(\xi))$$

となることがわかる。

他の点についても、同様に一次近似を計算すると、

$$\Phi(C) \sim \Phi(A) + \epsilon(x_v(\xi), y_v(\xi))$$
$$\Phi(D) \sim \Phi(A) + \delta(x_u(\xi), y_u(\xi)) + \epsilon(x_v(\xi), y_v(\xi))$$

となっており、$D_i = \Phi(I_i)$ は、$\delta(x_u(\xi), y_u(\xi))$ と $\epsilon(x_v(\xi), y_v(\xi))$ の張る平行四辺形で近似されることがわかる。このことと、平行四辺形の面積は行列式で計算できたことから、

$$|D_i| \sim \left|\det\begin{pmatrix} \delta x_u(\xi) & \epsilon x_v(\xi) \\ \delta y_u(\xi) & \epsilon y_v(\xi) \end{pmatrix}\right| = \delta\epsilon|\det \Phi'(\xi)| = |J(\xi)|\delta\epsilon = |J(\xi_i)|\,|I_i|$$

となることがわかる。ここで、I_i の面積は $\delta\epsilon$ であることに注意。
これが欲しい評価であった。 □

質疑応答で出た質問とその答えです。

- スライド 277 ページ: $J(u,v) \neq 0$ は、D と Ω とが一対一対応することと関係していますか
  $\longrightarrow$ 関係はあります。$J(a,b) \neq 0$ は (a,b) の近くでは Φ が単射になっていることを意味します。
  極座標表示で、$r_0 > 0$ であれば、$J(r_0,\theta_0) \neq 0$ であるので、(r,θ) が (r_0,θ_0) の近くだけを動くなら、単射です。しかし、(r,θ) と $(r_\theta + 2\pi)$ は同じ点に対応するので、(r,θ) が大きな範囲を動くと、単射ではなくなります。
- 積分順序の交換をするときには、図などを用いて説明することが必要ですか?
  $\longrightarrow$ 必要ではないです。しかし、図があると分かりやすいのは確かなので、図を書いた方が、自分のミスも減るし、読者にとっても親切です。
- 極座標変換で $J = r$ となるのは自明として良いですか?
  $\longrightarrow$ はい。覚えて使いましょう。