微分積分学第一・演習 F クラス(34~40 ユニット)講義

第 9 回(6/2 :火 10:45–12:25)

担当:柴田 将敬(理学院数学系)

本日のテーマ

- 重積分と累次積分(続き)

定義 11.17 (3 重積分)

$\mathbb{R}^3$ の集合 V, $f : V \to \mathbb{R}$ に対して、f の V 上の積分

$$\boxed{\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz}$$

を考えることが出来る。これを<u>3 重積分</u>という。より一般に n 重積分を考えることも出来る。(単に積分と呼ぶことも多い)。

重積分の性質と同様の性質が、3 重積分に対しても成り立つ。

定義 11.18 (体積)

$\mathbb{R}^3$ の集合 V に対して、$\iiint_V dxdydz$ を V の<u>体積</u>という。

計算をするためには、やはり、累次積分に帰着すれば良い。例えば、

$$V : a \le z \le b, (x,y) \in V_z \qquad (z \text{ を固定した断面が } V_z)$$

となるような a, b, V_z を求めておいて、

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dz \iint_{V_z} f(x,y,z)\,dxdy$$

として計算したり、

$$V : (x,y) \in D, \phi(x,y) \le z \le \psi(x,y) \qquad (x, y \text{ を固定したとき } z \text{ が動く範囲が } \phi, \psi)$$

となるような D, ϕ, ψ を求めておいて

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

として計算できる。

例 11.19

$$\iiint_V dxdydz,\ V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.\ (単位球の体積)$$

z の動く範囲を考えると、$-1 \leq z \leq 1$ で、z を固定すると、$x^2 + y^2 \leq 1 - z^2$ となる。
なので、積分は、

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2+y^2 \leq 1-z^2} dxdy$$

となる。重積分の部分を計算すれば、

$$\int_{x^2+y^2 \leq 1-z^2} dxdy = \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dx \int_{-\sqrt{1-z^2-x^2}}^{\sqrt{1-z^2-x^2}} dy = \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} 2\sqrt{1-z^2-x^2}dy$$
$$= \int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right]_{x=-a}^{x=a} = \pi a^2 = \pi(1 - x^2)$$

となる。ここで、$a = \sqrt{1 - z^2}$ とした。

従って、求める値は、

$$\int_{-1}^{1} \pi(1 - x^2)\, dx = \frac{4\pi}{3}$$

とわかる。
積分の仕方を変更して計算してみる。
(x, y) の動く範囲を考えると $x^2 + y^2 \leq 1$ で、(x, y) を固定すると、
$-\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ であるから、積分は、

$$\int_{x^2+y^2\leq 1} dxdy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz = \int_{x^2+y^2\leq 1} 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

となる。これを累次積分に直すと、

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dy$$

となる。z と x の文字が違うだけで、先ほどと同じ式なので、あとの計算は同じ。 □

定義 11.20

A を $\mathbb{R}^2$ の集合とする。

有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 ϕ, ψ で、$[a,b]$ 上 $\phi \leq \psi$ を満たすものを用いて、

$$A = \{(x,y); a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \text{ (境界を含まなくてもよい)}$$

と表されるとき、A は縦に単純であるという。また、

$$A = \{(x,y); a \leq y \leq b, \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\} \text{ (境界を含まなくてもよい)}$$

と表されるとき、A は横に単純であるという。

補足 11.21

本によって、「縦に単純な領域」という用語を使うことがあるが、これは、vertically simple region の和訳。
連結開集合を表す「領域」(domain)とは違うので、混乱しないように。

縦に単純: vertically simple, 横に単純: horizontally simple

さて、重積分 $\iint_A f(x,y)\,dxdy$ を計算するとき A が縦に単純だったり、横に単純だったりすれば、累次積分に帰着できる。つまり、次のようにすれば良い。

重積分 $\iint_A f(x,y)\,dxdy$ の計算

(a) A を縦か横に単純な部分 $A_1, \ldots, A_\ell$ に分割する。

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_{A_1} f(x,y)\,dxdy + \cdots + \iint_{A_\ell} f(x,y)\,dxdy}$$

(b) それぞれの A_i 上での積分を累次積分に帰着して計算する。

どのように分割するのか、また、累次積分に帰着する部分をきちんと求めるためにも、A を図示するのは重要な手続きとなる。

累次積分への帰着

A が縦に単純とする。
このとき、$A=\{(x,y);a\leq x\leq b,\phi(x)\leq y\leq\psi(x)\}$ のように表されるはずなので、

(i) x の動く範囲 a,b を求める。

(ii) 各 $x\in[a,b]$ を固定して、y の動く範囲 $\phi(x)$, $\psi(x)$ を求める。

(iii) $\iint_A f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_{\phi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\,dy$ となる。

累次積分への帰着

A が横に単純とする。
このとき、$A=\{(x,y);a\leq y\leq b,\phi(y)\leq x\leq\psi(y)\}$ のように表されるはずなので、

(i) y の動く範囲 a,b を求める。

(ii) 各 $y\in[a,b]$ を固定して、x の動く範囲 $\phi(y)$, $\psi(y)$ を求める。

(iii) $\iint_A f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dy\int_{\phi(y)}^{\psi(y)}f(x,y)\,dx$ となる。

あとは、累次積分を具体的に計算すれば良い。

例 11.22

$$\iint_D y\,dxdy \quad D: x^2+y^2 \le 1, y \le x+1, y \ge 0.$$

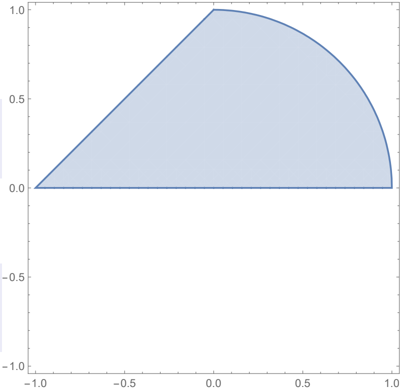
図から見て取れるように、
x の動く範囲は $-1 \le x \le 1$ で、x を固定すると、
y の動く範囲は、

$$0 \le y \le x+1 \ (-1 \le x \le 0),$$
$$0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \ (0 \le x \le 1)$$

となっている。
従って、累次積分にすると、

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x+1} y\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy$$

となる。あとは計算すれば良い。



$$\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x+1} y\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy$$
$$= \int_{-1}^{0} \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=x+1} dx + \int_{0}^{1} \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}(x+1)^2\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}(1-x^2)\,dx = \frac{1}{2}.$$

x, y の積分の順序を入れ替えて考えると、y の動く範囲が $0 \leq y \leq 1$ で、y を固定すると、x の動く範囲は

$$y-1 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$$

となる。なので、重積分を累次積分にすると、

$$\int_{0}^{1} dy \int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} y\,dx = \int_{0}^{1} (\sqrt{1-y^2}-(y-1))y\,dy = \left[\frac{-1}{3}(1-y^2)^{3/2} - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

となる。 □

計算結果からわかるように、積分の順序によって、途中の計算は異なる。つまり、積分順序によって、計算が楽になったり難しくなったりすることがある。

重積分の計算において、累次積分は x で先に積分するものと、y で先に積分するものの両方が使えた。この考え方を使えば、

累次積分(x で先に積分) $\longleftrightarrow$ 重積分 $\longleftrightarrow$ 累次積分(y で先に積分)

というように変形できる。つまり、累次積分の順序が交換できる。
積分する範囲が長方形の場合は、

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

と簡単であるが、積分する範囲が縦に単純かつ横に単純であっても、

$$\int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\tilde{\phi}(y)}^{\tilde{\psi}(y)} f(x,y)\,dx$$

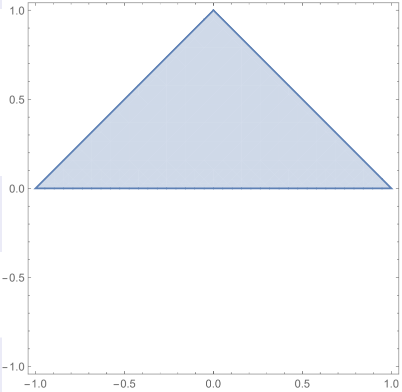
であって、a, b, ϕ, ψ と $c, d, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ の関係は簡単ではない。

$$\int_0^1 dy \int_{y-1}^{-y+1} f(x,y)\,dx$$ の積分順序を交換する。

累次積分に対応する積分範囲 D は、

$$D: 0 \leq y \leq 1, y-1 \leq x \leq -y+1$$

となり、図示すると右図のようになる。



図から見て取れるように、
x の動く範囲は $-1 \leq x \leq 1$ で、x を固定すると、
y の動く範囲は、

$$0 \leq y \leq x+1 \ (-1 \leq x \leq 0),$$
$$0 \leq y \leq -x+1 \ (0 \leq x \leq 1)$$

となっている。
従って、累次積分にすると、

$$\int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} f(x,y)\,dy + \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} f(x,y)\,dy$$

となる。 □

第 12 節 積分の定義

目標

定積分や重積分の定義と Riemann 和について紹介する。

有界閉区間 $[a,b]$ 上で関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ の定積分を考えたい。そのための用語を導入する。

定義 12.1 (分割)

$[a,b]$ に対して、$n\in\mathbb{N}$ で、

- $I_1,\dots,I_n$ は有界閉区間。
- $I_1\cup\cdots\cup I_n=[a,b]$.
- $i\neq j$ ならば $I_i\cap I_j$ は高々 1 点(つまり、$I_i\cap I_j$ の長さは 0)。

となっているとき、$I_1,\dots,I_n$ をまとめて Δ で表し、区間 $[a,b]$ の分割という。
また、各区間 I_i の長さを $|I_i|$ で表し、$|I_1|,\dots,|I_n|$ の最大値を $|\Delta|$ で表す。

補足 12.2

- ありとあらゆる分割 Δ を考えるので、分割によって n は異なる。
- $|\Delta|$ は分割の「細かさ」を表している。

定義 12.3 (Riemann 和)

分割 $\Delta : I_1, \ldots, I_n$ を一つ考え、$\xi_i \in I_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ となる $\{\xi_i\} = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ を考える。

このとき、

$$\boxed{R[\Delta; \{\xi_i\}] := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|I_i|}$$

を Δ と $\{\xi_i\}$ に対する f のRiemann 和という。

補足 12.4

- $f(\xi_i)|I_i|$ というのは、底辺が I_i, 高さが $f(\xi_i)$ の長方形の符号付面積になっている。
- つまり、符号付面積であるところの $\int_a^b f(x)\,dx$ を $R[\Delta; \{\xi_i\}]$ で近似している。

定義 12.5

$|\Delta| \to 0$ のとき Riemann 和が、Δ の取り方や $\{\xi_i\}$ の取り方に関係なく($f, [a,b]$ だけに依存する)一つの値 J に収束するとき、

J を f の I 上での<u>定積分</u>といい、$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表す。

このとき、f は $[a,b]$ 上で<u>可積分</u>であるという。

これは、記号で表せば、

$$\lim_{|\Delta|\to 0} R[\Delta, \{\xi\}] = \int_a^b f(x)\,dx$$

ということである。

発展的話題

定積分の定義

$$\lim_{|\Delta|\to 0} R[\Delta, \{\xi\}] = \int_a^b f(x)\,dx$$

を、より精確な表現(いわゆる ϵ-δ 論法の考え方)で言い換えると、
0 に収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ があって、$|\Delta| \leq a_n$ となる Δ と $\{\xi_i\}$ に対しては

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - R[\Delta, \{\xi\}]\right| \leq \frac{1}{n}$$

が成り立つということである。

$|\Delta|$ が小さくなると定積分の値に近づいていくというのが表現されているのがわかると思う。

定義 12.6 (分割)

長方形 $I = [a, b] \times [c, d]$ に対して、$n \in \mathbb{N}$ で、

- $I_1, \ldots, I_n$ は長方形。
- $I_1 \cup \cdots \cup I_n = I$.
- $i \neq j$ ならば $I_i \cap I_j$ は $\emptyset$ か 1 点か線分(つまり、$I_i \cap I_j$ の面積は 0)。

となっているとき、$I_1, \ldots, I_n$ をまとめて Δ で表し、I の(長方形による)分割という。
また、各区間 I_i の大きさを $\operatorname{diam} I_i$ で表し、$\operatorname{diam} I_1, \ldots, \operatorname{diam} I_n$ の最大値を $|\Delta|$ で表す。

定義 12.7

$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合 A に対して、x, y が A 上を動くときの $|x - y|$ の最大値を A の直径といい、$\operatorname{diam} A$ で表す。

$$\boxed{\operatorname{diam} A := \max\{|x - y|; x, y \in A\}}$$

である。

直径: diameter

定義 12.8 (Riemann 和)

長方形 $I = [a, b] \times [c, d]$ と $f : I \to \mathbb{R}$ を考える。

I の分割 $\Delta : I_1, \ldots, I_n$ と、$\xi_i = (x_i, y_i) \in I_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ となる $\{\xi_i\} = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ に対して、

$$\boxed{R[\Delta; \{\xi_i\}] := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|I_i|}$$

を Δ と $\{\xi_i\}$ に対する f のRiemann 和という。ここで、$|I_i|$ は I_i の面積である。

補足 12.9

- $f(\xi_i)|I_i|$ というのは、底面が I_i, 高さが $f(\xi_i)$ の直方体の符号付体積になっている。
- つまり、符号付体積であるところの $\int_I f(x, y)\, dxdy$ を $R[\Delta; \{\xi_i\}]$ で近似している。

定義 12.10 (重積分)

長方形 $I = [a,b]\times[c,d]$ と $f : I \to \mathbb{R}$ を考える。

$|\Delta| \to 0$ のとき、f の Riemann 和が、Δ の取り方や $\{\xi_i\}$ の取り方に関係なく(f, I だけに依存する)一つの値 J に収束するとき、
J を f の I 上での<u>重積分</u>といい、$\displaystyle\iint_I f(x,y)\,dxdy$ で表す。
このとき、f は I 上で<u>可積分</u>であるという。

補足 12.11

一般の有界集合 $A \subset I := [-M,M]\times[-M,M]$ 上の関数 $f : A \to \mathbb{R}$ に対しては、

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{if } (x,y)\in A, \\ 0 & \text{if } (x,y)\notin A \end{cases}$$

というようにした $\tilde{f}$ を考えて、$\tilde{f}$ が I 上で可積分なときに、f は A 上で可積分といい、
$\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dxdy := \iint_I \tilde{f}(x,y)\,dxdy$ で重積分を定める。

積分を定義するときは、長方形を細かい長方形で分割したのであるが、面積確定集合 D と D 上で可積分な f に対しては、より一般な分割をしても、分割を細かくしていけば、Riemann 和は積分値に収束する。

定理 12.12 (教科書 p.195 6°)

A を $\mathbb{R}^2$ の面積確定な集合、f は A 上で可積分とする。$n \in \mathbb{N}$ で、

- $A_1, \ldots, A_n$ は面積確定な閉集合。
- $A_1 \cup \cdots \cup A_n = A$.
- $i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j$ の面積は 0。

となっているとき、$A_1, \ldots, A_n$ をまとめて Δ で表し、A の(一般的な)分割という。
$\operatorname{diam} A_1, \ldots, \operatorname{diam} A_n$ の最大値を $|\Delta|$ で表す。

このとき、A の分割 Δ と $\xi_i \in A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して、

$$\boxed{\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|A_i| = \iint_A f(x, y)\, dx dy}$$

が成り立つ。

$I = [a, b] \times [c, d]$, $f :\to \mathbb{R}$ を連続関数としたとき、

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy$$

の証明を紹介する。(教科書 p.197)

$[a, b]$ を $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ で m 個に区切って、この分割を Δ_x とおく。
$|\Delta_x| \leq \delta/2$ となる程度に細かく区切る。

次に、$[c, d]$ を $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ で n 個に区切って、この分割を Δ_y とおく。
$|\Delta_y| \leq \delta/2$ となる程度に細かく区切る。

この段階で、$I = [a, b] \times [c, d]$ が mn 個の $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ に分割されたことになる。この分割を Δ とする。

そして、作り方から、$x_i - x_{i-1} \leq \delta/2$, $y_j - y_{j-1} \leq \delta/2$ となっているから、$\operatorname{diam} I_{ij} \leq \delta$ が成り立っている。つまり、$|\Delta| < \delta$ となっている。

次に $\displaystyle\int_c^d f(x, y)\, dy$ を評価する。

$x_{i-1} \leq x \leq x_i$ に対して、

$$F(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy = \sum_{j=1}^n \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \leq \sum_{j=1}^n \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\max_{y \in [y_{j-1}, y_j]} f(x,y) \right) dy$$
$$= \sum_{j=1}^n \left(\max_{y \in [y_{j-1}, y_j]} f(x,y) \right) (y_j - y_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^n M_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

が成り立つ。ここで、

$$M_{ij} := \max_{x \in [x_{i-1}, x_i], y \in [y_{j-1}, y_j]} f(x,y)$$

である。同様にして、

$$\int_a^b F(x)\,dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sum_{j=1}^n M_{ij}(y_j - y_{j-1})\,dx$$
$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

となる。

ここで、f は連続であるので、$M_{ij} = f(\xi_{ij})$ となる $\xi_{ij} \in I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ がとれる。以上をまとめると、

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_a^b F(x)\,dx \le \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$
$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij})|I_{ij}| = R(\Delta, \{\xi_{ij}\})$$

となる。I の分割 Δ を細かくして(δ を小さくして)極限をとれば、

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy \le \iint_I f(x,y)\,dxdy$$

を得る。同様にして反対の不等式

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy \ge \iint_I f(x,y)\,dxdy$$

も示せるので、結論が従う。 □

質疑応答で出た質問とその答えです。

- 246 ページの D ってどんな集合なんですか??
$\longrightarrow$ $D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \exists z \in \mathbb{R}, (x, y, z) \in V\right\}$ とか。V によっては、z に関して単純になってないかもしれないので、その場合は、V を分割しておく必要はあります。
この D は、言い換えれば、V の xy 平面への直交射影です。
- リーマン和の極限で定義されるからリーマン積分と呼ばれるのですか?
$\longrightarrow$ Riemann 和、Riemann 積分ともに、Riemann が導入したのでそのように呼ばれています。
- 3 重積分に関してなのですが、被積分関数の $f(x, y, z)$ が 1 のときに、その 3 重積分は体積を表す 、という認識で合っていますか?
$\longrightarrow$ 次の問とまとめて答えます。

質疑応答で出た質問とその答えです。

- 例題で球の体積とありましたが求めている値は四次元という認識で大丈夫でしょうか？
  $\longrightarrow$ 現代的な微分積分学において、D の面積の定義が $\iint_D dxdy$ で、V の体積の定義が $\iiint_V dxdydz$ です。なので、例で計算したものは、球の体積の定義に基づく計算です。

  また、定積分が表すものを感覚的にわかりやすく説明するために、$\int_a^b f(x)\,dx$ が符号付面積だと言ったり、$\iint_D f(x,y)\,dxdy$ は符号付体積だと言ったりします。

  しかし、$\iint_D f(x,y)\,dxdy$ は 3 符号付体積だけを表すわけではありません。積分が何を表すかは、文脈や f に依ります。

  たとえば、2 次元的な物体 D について、$f(x,y)$ が (x,y) における密度$(\mathrm{g}/\mathrm{m}^2$ とか$)$を表しているとき、$\iint_D f(x,y)\,dxdy$ は D の重さになります。
  3 次元的な物体 V について、$f(x,y,z)$ が (x,y,z) における密度を表しているとき、$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$ は V の重さになります。

  3 重積分を使えば、4 次元的な物体で、グラフと座標平面に挟まれる部分の符号付体積を計算できますが、3 重積分は、4 次元的な物体の量しか表さないわけではありません。