微分積分学第一・演習 F クラス(34~40 ユニット)講義

第 8 回(5/28 :木 8:50–10:30)

担当:柴田 将敬(理学院数学系)

本日のテーマ

- 重積分と累次積分

第 11 節 重積分と累次積分

目標

重積分の意味と基本的な計算法について学ぶ

一変数関数 $f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ とは、$[a,b]$ 上で、x 軸と $y=f(x)$ のグラフに挟まれる部分の符号付面積であった。
おなじように、多変数関数についても、重積分を定義する。

定義 11.1 (重積分の定義(?))

$\mathbb{R}^2$ 上の有界集合 A と有界な関数 $f(x,y) : A \to \mathbb{R}$ を考える。

A とグラフ $z=f(x,y)$ に挟まれる部分の符号付き「体積」を f の A 上での<u>重積分</u>といい、
$\iint_A f(x,y)\,dxdy$ とか $\int_A f(x,y)\,dxdy$ とかで表す。

補足 11.2

集合の体積を絶対値で表すと、

$$\begin{aligned}\iint_A f(x,y)\,dxdy &= \left|\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ; (x,y)\in A, 0\le z\le f(x,y)\right\}\right| \\ &\quad - \left|\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ; (x,y)\in A, f(x,y)\le z\le 0\right\}\right|\end{aligned}$$

となる。これが符号付体積の意味。

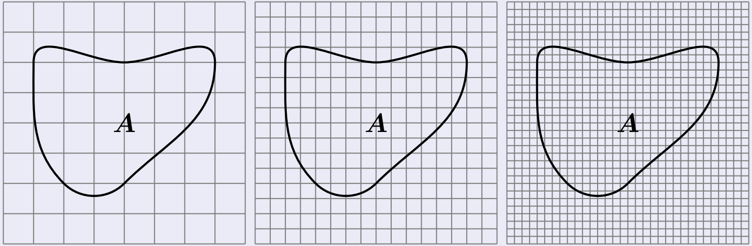
補足 11.3

- 理論的には、体積が先に定義されているわけではなく、重積分が定義され、それによって体積が定義される。
- 一変数関数の場合は、有界閉区間 $[a,b]$ 上での連続関数の定積分を考えれば良かったが、2変数関数では、定義域としては、さまざまなものを考えたい。そうすると、A としてどのような集合が許されるか?また、どのような関数ならば良いのか?の両方が問題となる。

重積分の定義をきちんとやるのは、大変なので、ここでは、面積の定義のやり方だけ紹介する。本質的には定積分や重積分の定義も同じことをやっている。

定義 11.4 (面積)

- A を $\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合とする。
- 0 に収束する正数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取る。(例えば $a_n = 1/2^n$。)
- $\mathbb{R}^2$ を一辺が a_n の正方形で分割する。
- A に含まれる正方形の面積を s_n, A と共通部分を持つ正方形の面積を S_n とする。
- $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$ であれば、その極限 S を A の面積とする。このとき、A は<u>面積確定</u>であるという。



注意

- 先の定義で定まる面積は、数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の取り方に依らない。例えば、$a_n = 1/2^n$ としても $a_n = 1/n$ として面積は一致する。
- $s_\infty = \lim_{n\to\infty} s_n$, $S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n$ とすると、$s_\infty \leq S_\infty$.
- A によっては、面積が定まらないこともある。つまり、$s_\infty < S_\infty$ となることがありうる。例えば、$A = \{(x,y); x, y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$ とすると $s_\infty = 0$, $S_\infty = 1$ となる。
- 正方形ではなく、より一般の長方形に分ける定義もある。

定理 11.5 (面積に関する性質)

$A, B \subset \mathbb{R}^2$ は有界集合とする。

- A が面積確定ならば、面積 $|A|$ は 0 以上の実数。
- A が面積確定、B が A と合同ならば、B も面積確定で、$|A| = |B|$.
- A, B が面積確定なら、$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ も面積確定。さらに、$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ が成り立つ。特に、$A \subset B$ ならば $|A| \leq |B|$.
- A が面積確定 $\Leftrightarrow$ $|\partial A| = 0$ である(教科書 p.192 例 1)。
- 点、C^1 級曲線、連続関数(可積分関数で良い)のグラフ $\{(x, y); y = f(x)\}$ として表される集合の面積は 0.
- 有限個の C^1 級の曲線をつなげたもので囲まれる有界集合は面積確定。
- 有界閉区間 $[a, b]$ 上の可積分関数 $\phi(x) \leq \psi(x)$ を用いて

$$\{(x, y); a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

  と表される集合は面積確定。さらに、その面積は $\int_a^b (\psi(x) - \phi(x))\,dx$ に一致する。つまり、定積分で定めた面積の拡張になっている。

補足 11.6

ここで、C^1 級曲線とは、$-\infty < a < b < \infty$, $[a, b]$ 上の C^1 級関数 $x(t)$, $y(t)$ を用いて、$\{(x(t), y(t)); a \leq t \leq b\}$ とパラメータ表示されるもの。

用語

有界集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ 上の有界関数 $f : A \to \mathbb{R}$ に対して、重積分 $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dxdy$ が定まるとき、f は A 上で<u>可積分</u>である。という。

定義 11.7 (特性関数)

$A \subset \mathbb{R}^2$ とする。$\chi_A(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{if } (x,y) \in A, \\ 0 & \text{if } (x,y) \notin A \end{cases}$

で定まる $\chi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を A の特性関数(定義関数)という。

定理 11.8

$A \subset \mathbb{R}^2$ とする。

「A が面積確定」と「χ_A が A を含む長方形 $[a,b] \times [c,d]$ 上で可積分である」は同値。

さらに、$|A| = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \chi_A(x,y)\,dxdy = \iint_A dxdy$ が成り立つ。

特性関数: characteristic function

定理 11.9 (連続関数の可積分性)

A は面積確定な $\mathbb{R}^2$ の部分集合、f は A 上の有界連続関数とする。

このとき、f は A 上で可積分である。

補足 11.10

f が A 上で連続とは、任意の $(x, y) \in A$ と $\{x_n, y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ で $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y)$ となるものに対して、$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(x, y)$ が成り立つことである。

f が A を含む開集合 B で連続なら、f は A で連続となっている。

定理 11.11 (重積分の性質)

A, B は $\mathbb{R}^2$ の有界集合とする。また、f, g は(考えている定義域で)有界な関数とする。

- A の面積が 0 であれば、f は A 上可積分で、$\iint_A f(x,y)\,dxdy = 0$.
- f, g が A 上で可積分ならば、$af + bg$ (a, b は定数)は A 上可積分で、
$$\iint_A af(x,y) + bg(x,y)\,dxdy = a\iint_A f(x,y)\,dxdy + b\iint_A g(x,y)\,dxdy$$
が成り立つ。
- f, g が A 上で可積分ならば、fg も A 上で可積分。
- f, g が A 上で可積分で、$f(x,y) \le g(x,y)$ $((x,y) \in A)$ が成り立つならば、
$$\iint_A f(x,y)\,dxdy \le \iint_A g(x,y)\,dxdy$$
が成り立つ。特に、$\left|\iint_A f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint_A |f(x,y)|\,dxdy$.

定理 11.12 (重積分の性質)

A, B は $\mathbb{R}^2$ の面積確定な有界集合、$f : A \cup B \to \mathbb{R}$ は $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ は A 上で可積分、B 上で可積分とする。

このとき、f は $A \cup B$, $A \cap B$ 上で可積分で、

$$\iint_{A\cup B} f(x,y)\,dxdy + \iint_{A\cap B} f(x,y)\,dxdy = \iint_A f(x,y)\,dxdy + \iint_B f(x,y)\,dxdy$$

が成り立つ。特に、$|A \cap B| = 0$ であれば、

$$\iint_{A\cup B} f(x,y)\,dxdy = \iint_A f(x,y)\,dxdy + \iint_B f(x,y)\,dxdy$$

が成り立つ。

一変数関数の定積分を計算するときは、原始関数を見つければ良かった。

では、重積分を計算したいときは、どのようにすれば良いのか?それは、一変数関数の積分に帰着するのである。

$$V = \iint_{[-1,1]\times[-1,1]} x^2 + y^2 \, dxdy$$

を計算したい。

これは、$[-1,1]\times[-1,1]$ 上で、xy 平面と放物面 $z = x^2 + y^2$ にはさまれる部分の体積である。

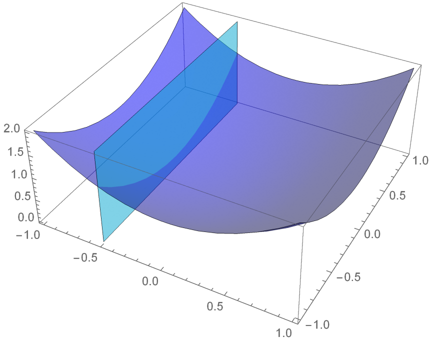
体積は、断面積 × 厚さを足し合わせることによって求まるのであった。

つまり、$x = a$ における断面積を $S(a)$ とすると、

$V = \int_{-1}^{1} S(x)\, dx$ となることを意味する。

そして、断面積は、$S(x) = \int_{-1}^{1} x^2 + y^2 \, dy$ で求まる。

あとは計算。



この考え方から、

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

となることがわかる。右辺のように 1 変数関数の積分の繰り返しで表される積分を累次積分という。
長方形でない集合上での重積分も扱いたい。

$A = \{(x,y); a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, $-M \leq \phi(x) \leq \psi(x) \leq M$ とする。

A 上で $f(x,y)$ を積分するということは、$B := [a,b] \times [-M, M]$ 上で $f(x,y)\chi_A(x,y)$ を積分することであるから、

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_B f(x,y)\chi_A(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{-M}^M f(x,y)\chi_A(x,y)\,dy \right) dx$$
$$= \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

となることがわかる。ここで、x を固定すると、y が $[\phi(x), \psi(x)]$ に含まれているかどうかで $\chi_A(x,y)$ の値が変化していることに注意する。

定理 11.13

$\phi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続関数で、$\phi(x) \le \psi(x)$ $(x \in [a, b])$ が成り立つとし、
$A = \{(x, y); a \le x \le b, \phi(x) \le y \le \psi(x)\}$ とする。
さらに、有界関数 $f : A \to \mathbb{R}$ は、A の内部で連続とする。
このとき、次が成立。

- $x \mapsto \displaystyle\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy$ は $[a, b]$ 上の連続関数。
- $\displaystyle\iint_A f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$

補足 11.14

右辺の累次積分は、括弧を省略したり、
$\displaystyle\int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy,\ \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} dy f(x, y)$
のように記述することもある。

補足 11.15

これまでの議論は、x を固定した断面を考えて、y で先に積分するようにしたが、x と y を入れ替えて、x で先に積分するようにしても良い。

例 11.16

$$\iint_D x^2 y\,dxdy,\ D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}.$$

D は半径 1 の円の内側で、第一象限の部分である。

累次積分に直して計算すると、

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y\,dy = \int_0^1 \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 x^2 \frac{(1-x^2)}{2}\,dx = \frac{1}{15}$$

となる。
同じように、x で先に積分するようにしても計算できる。

質疑応答で出た質問とその答えです。

- 238 についてです。最初から χ_A を入れないで式を立ててはいけないのですか?
  $\longrightarrow$ 断面積を積分するということで定理 1.13 の式が理解できるなら、それで OK です。χ_A を経由しなくてもかまいません。
  長方形の場合に帰着しようとしたら、χ_A を使うのが良いというだけです。
- 238 ページの χ の扱いがよくわからないのですが、もう一度説明していただけますか? $\longrightarrow$ 同上
- 238 ページでわざわざ特性関数と B を使って書き直すのはなぜでしょう $\longrightarrow$ 同上
- 230 ページの 3 つ目の矢印についてもう一度解説していただきたいです
  $\longrightarrow$ $A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]; x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$ は正方形 $[0, 1] \times [0, 1]]$ の中で、x 座標も y 座標もともに有理数となっているだけを集めてきたものです。このようにすると、S_n の方は $[0, 1] \times [0, 1]$ を覆うしかないので、$S_n \geq 1$. また、どんなに小さく区切った正方形でも、A に含まれるようにはできない(無理数の点が A からはみ出る)ので、$s_n = 0$ となります。
  結局、$s_\infty = 0$, $S_\infty = 1$ となって、面積が確定しません。
- レポート課題の Jacobi 行列の逆行列で偏導関数が求まるってどういうことですか??前回の授業でやってるかもしれませんが、、、
  $\longrightarrow$ 次のページで説明します。

一般に、$\dfrac{\partial r}{\partial x} = 1 \Big/ \dfrac{\partial x}{\partial r}$ は成り立たない。では、どのようにするのか?前回の講義スライドも参考に。

極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を想定し、x, y 座標を r, θ 座標に変換する状況を考える。

x, y は r, θ の関数、r, θ は x, y の関数であるから、

$x = x(r(x,y), \theta(x,y))$, $\quad y = y(r(x,y), \theta(x,y))$ となっている。

左辺は、$f(x,y) = x$ や $f(x,y) = y$ という (x,y) の関数、右辺は $x(r,\theta)$ や $y(r,\theta)$ と $r(x,y)$, $\theta(x,y)$ を合成して出来る関数とみなして、2 つの式それぞれについて、x 偏微分や y 偏微分を計算すると、

$\boxed{\mathrm{I}}$ $1 = x_r r_x + x_\theta \theta_x$, $\quad 0 = x_r r_y + x_\theta \theta_y$, $\quad 0 = y_r r_x + y_\theta \theta_x$, $\quad 1 = y_r r_y + y_\theta \theta_y$

がわかる。(極座標だと) x_r, x_θ, y_r, y_θ は具体的に計算できるから、r_x, r_y, θ_x, θ_y の 4 つが未知数である 4 本の連立方程式を思ってこれを解けば、r_x, r_y, θ_x, θ_y が求まる。

このことを行列の言葉で解釈しなおすと、$\boxed{\mathrm{I}}$は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix}$$

であり、右辺の一つ目は Jacobi 行列 $\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)}$, 右辺の二つ目は Jacobi 行列 $\frac{d(r,\theta)}{d(x,y)}$ である。そして、左辺は単位行列。つまり、$\frac{d(r,\theta)}{d(x,y)}$ は、$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)}$ の逆行列であれば良い。

$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)}$ が分かっているときに $\frac{d(r,\theta)}{d(x,y)}$ を求めるというのが考えている問題だった。
2×2 行列の逆行列については公式があるので、それを利用すれば、$\frac{d(r,\theta)}{d(x,y)}$ が求まる。
なお、例えば

$$\frac{\partial r}{\partial x} = r_x = \frac{y_\theta}{x_r y_\theta - x_\theta y_r}$$

などとなっており、決して、右辺は $1 \Big/ \frac{\partial r}{\partial x}$ などではない。