微分積分学第一・演習 F クラス(34~40 ユニット)講義

第 7 回(5/26 : 火 10:45–12:25)

担当:柴田 将敬(理学院数学系)

本日のテーマ

- 合成関数の偏微分(続き)

定義 10.17 (一次写像)

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $f : x \mapsto y$ とする。

$f(0) = 0$ であり、かつ、各 y_i が $x_1, \ldots, x_n$ の一次関数であるとき、f は $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への一次写像であるという。

例 10.18

$(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$ で定まる $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像 f は一次写像。

$(x, y) \mapsto (ax + by + 1, cx + dy)$ で定まる $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像 f は、$f(0, 0) = (1, 0)$ となっているので、一次写像ではない。

$(x, y) \mapsto ax + by$ で定まる $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への写像 f は一次写像。

補足 10.19

一次写像は、線形写像と呼ばれるものと同じものである。
しかしながら、定義の都合上、この講義では一次写像と呼ぶ。
気になる人は、線形写像の定義を確認のこと。

一次写像は、次のように、行列で使って表すことが出来る。

例 10.20 (行列を用いた一次写像の表示)

$(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$ で定まる $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への一次写像: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$(x, y) \mapsto ax + by$ で定まる $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への一次写像: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

補足 10.21

結局、一次写像は、行列を使って表示されるのであった。逆に、例のように行列を用いて定まる写像は、一次写像になっている。

なので、$m \times n$ 行列と、$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への一次写像は同一視されることがある。

定義 10.22 (一次変換)

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への一次写像は、一次変換と呼ばれる。

ここでは、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ の一次変換で代表的なものを挙げておく。

例 10.23 (拡大·縮小)

$a > 0$, $b > 0$ とする。
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ は、x 座標を a 倍、y 座標を b 倍する一次写像となる。

例 10.24 (鏡映変換)

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は、x 座標を -1 倍する。
つまり、y 軸中心に線対称な位置へ点を対応させる一次変換である。

例 10.25 (鏡映変換)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は、y 座標を -1 倍する。
つまり、x 軸中心に線対称な位置へ点を対応させる一次変換である。

例 10.26 (回転)

$\theta \in \mathbb{R}$ とする。
$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は、原点中心に、正の向きへ θ だけ回転させる一次変換である。

例 10.27 (変換の合成)

$\mathbb{R}^n$ 上の一次変換の行列 A, B を考える。($n \times n$ 行列である。)

行列 A での変換を $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, 行列 B での変換を $f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ とする。
このとき、その合成 $x \mapsto f_B(f_A(x))$ を表す行列は BA である。
つまり、合成した変換の行列は行列の積になっている。

$$f_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ f_B\begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix} \mapsto (\alpha s+\beta t, \gamma s+\delta t) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix}$$

に対して、合成変換を計算すれば、

$$f_B\left(f_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha(ax+by)+\beta(cx+dy) \\ \gamma(ax+by)+\delta(cx+dy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha a+\beta c)x+(\alpha b+\beta d)y \\ (\gamma a+\delta c)x+(\gamma b+\delta d)y \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \alpha a+\beta c & \alpha b+\beta d \\ \gamma a+\delta c & \gamma b+\delta d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となっている。

補足 10.28

- 行列の積は、結合法則 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ が成り立つ。なので、$\boldsymbol{ABC}$ などと書いて良い。
- 行列の積は、交換法則は成り立たない。つまり、$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ となることがある。変換の例で考えれば、横に 2 倍拡大してから $\pi/2$ 回転するのと、$\pi/2$ 回転してから横に 2 倍拡大するのは異なる。

例 10.29

$\mathbb{R}^2$ 上の一次変換で、$y = x$ を中心に線対称の位置へ移す変換は、
$-\pi/4$ 回転・x 軸中心の鏡映・$\pi/4$ 回転を順に合成したものであるから、

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ となる。

行列の計算については、各自チェック。

$f(x,y)$ の (a,b) における一次近似は、

$$f(x,y) \sim f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

であった。変形すれば、

$$f(x,y) - f(a,b) \sim \begin{pmatrix} f_x(a,b) & f_y(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = f'(a,b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

となっている。これは、

(a,b) の近くでは、

$f(x,y)$ の変化量 $\sim$ (x,y) の変化量を一次写像 $f'(a,b)$ で写したもの。

となっていることを意味する。

言い換えれば、

点 (a,b) において、$f(x,y)$ (の変化)は一次写像 $f'(a,b)$ で近似される。ということになる。

定義 10.30 (Jacobi 行列)

$m, n \in \mathbb{N}$ とする。$\mathbb{R}^m$ 上で定義され、$\mathbb{R}^n$ に値をとる写像 F (ベクトル値関数ということもある)を、

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

で表す。このとき、F_i の x_j 偏微分を並べた行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}$$

を、

$$F'(x), \quad DF(x), \quad \frac{dF}{dx}(x), \quad \frac{dy}{dx} \ (y = F(x) \text{ で考えているとき})$$

などで表す。これは、各 x における、F の微分係数に他ならない。Jacobi 行列と呼ばれることもある。

補足 10.31

一次近似は

$$\begin{pmatrix} F_1(x) - F_1(a) \\ \vdots \\ F_n(x) - F_n(F) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_m - a_m \end{pmatrix}$$

となっているから、これは、

$$F(x) - F(a) \sim F'(a)(x-a), \quad F(x) \sim F(a) + F'(a)(x-a)$$

のように表現できる。

補足 10.32

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の Jacobi 行列は(どの点でも) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ である。

つまり、一次写像を表す行列と Jacobi 行列は同じもの。

$x(t), y(t)$ を一変数関数とする。$g(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ に対して、$t = a$ における一次近似は、

$$x(t) \sim x(\alpha) + x'(\alpha)(t - \alpha),\ y(t) \sim y(\alpha) + y'(\alpha)(t - \alpha)$$

であるが、これは、

$$g(t) - g(\alpha) \sim g'(\alpha)(t - \alpha)$$

と表せるのであった。

$\mathbb{R}^n$ の元は列ベクトルで表すことにすると、2 変数関数 $f = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ における一次近似は、

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + f_x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(x - a) + f_y\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(y - b)$$

で、これは、

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \sim f'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \quad \text{ただし、} f'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & f_y\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

と表せる。
それでは、合成関数 $h(t) = f(g(t))$ の一次近似はどうなっているのか?

合成関数 $h(t) = f(g(t))$ の一次近似はどうなっているのか?
$h(t)$ の $t = \alpha$ における一次近似は、

$$h(t) \sim h(\alpha) + h'(\alpha)(t - \alpha)$$

であったから、$h'(\alpha)$ を合成関数の偏微分法を用いて計算すると、

$$f(g(t)) - f(g(\alpha)) \sim \left(f_x \begin{pmatrix} x(\alpha) \\ y(\alpha) \end{pmatrix} x'(\alpha) + f_y \begin{pmatrix} x(\alpha) \\ y(\alpha) \end{pmatrix} y'(\alpha) \right) (t - \alpha)$$

となる。これは、

$$f(g(t)) - f(g(\alpha)) \sim f' \begin{pmatrix} x(\alpha) \\ y(\alpha) \end{pmatrix} g'(\alpha)(t - \alpha)$$

であることを意味している。つまり、

合成関数 $f(g(x))$ の α における微分係数は、一次写像(に対応する行列)である $f'(g(\alpha))$ と $g'(\alpha)$ の積になっている。

一次写像の合成は、対応する行列の積であったから、これはある意味当然である。
このことは、合成関数の微分が行列の積で表されることを示唆している。

定理 10.33 (合成関数の微分)

$\ell, m, n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ を微分可能な写像とする。$y = g(x)$, $z = f(y)$ で定まる合成写像に対して、

$$\{f(g(x))\}' = f'(y)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

が成り立つ。

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

と表すこともある。

補足 10.34

- 関数の微分を行列を用いて表すことによって、あたかも一変数のときと同じ公式が得られる。
- 証明は、行列の積を計算して、各成分ごとに、合成関数の偏微分の公式(教科書 p.166 定理 9)を用いれば良い。

1 変数の時と同じく、合成関数の微分の公式から逆関数の微分の公式が得られる。

定義 10.35 (単位行列)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ など、$n \times n$ 行列で、i 行 i 列の成分が 1 で残りは 0 になっている行列を<u>単位行列</u>と呼び、I_n で表す(E_n とか 1_n を使うこともある)。

補足 10.36

任意の $n \times n$ 行列 A に対して、$AI_n = I_nA = A$ が成り立つ。

定義 10.37 (行列の定数倍)

行列 A、数 c に対して、A の各成分を c 倍した行列を cA と表す。

例 10.38

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

単位行列: identity matrix, 逆行列: inverse matrix

定義 10.39 (逆行列)

$n \times n$ 行列 A に対して、$AB = BA = I_n$ となる $n \times n$ 行列があるとき、
この B を A の逆行列と呼び、A^{-1} で表す。

例 10.40

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は、$\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
なお、$ad - bc = 0$ のときは、逆行列を持たない。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列が $B = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ になっていることは、直接 $AB = BA = I_n$ を計算して確かめれば良い。

逆写像の微分

$n \in \mathbb{N}$, D と U は $\mathbb{R}^n$ の開集合で、f は D 上で単射・C^1 級、$f(D) = U$ であるとする。
さらに、各 $x \in D$ に対して、$f'(x)$ は逆行列を持つと仮定する。

このとき、$y = f(x)$ の逆写像を f^{-1} と表すと、

$$I_n = f'(x)(f^{-1})'(y)$$

が成り立つ。ここで、I_n は n 次の単位行列である。つまり、f' と $(f^{-1})'$ は互いに逆行列になっている。これを

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$$

と表すこともある。

補足

この仮定のもとでは、f の逆写像の存在を示すことが出来る。それは、逆写像定理と呼ばれる。(教科書 p.258)

例 10.41

極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

$r > 0$ つまり $(x, y) \neq 0$ とする。
x, y が r, θ の関数であると思えば、

$$F\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r,\theta) \\ y(r,\theta) \end{pmatrix} = \left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)$$

となる。逆写像は、r, θ が x, y の関数だと思えば、

$$F^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(x,y) \\ \theta(x,y) \end{pmatrix}$$

である。
計算すれば、

$$F' = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

となる。

逆写像の微分の公式、逆行列の表示、F' の計算を合わせると、

$$(F^{-1})' = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となる。実際、例えば、$x > 0$ の部分では、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$ と表すことが出来、これを用いて計算すると、

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \theta_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \theta_y = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

となっているから、これに $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を代入すれば、

$$(F^{-1})' = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2 + y^2} & y/\sqrt{x^2 + y^2} \\ -y/(x^2 + y^2) & x/(x^2 + y^2) \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である。

質疑応答で出た質問とその答えです。

- ～の記号ってどういう意味ですか?
  $\longrightarrow$ 近似を表す記号です。$A \sim B$ は A と B が大体同じという意味です。ここでは、一次近似なので、考えている点の近くでは、A に一番近い一次関数が B になるということです。
- 215 ページで f' は行ベクトルになっていますか?
  $\longrightarrow$ はい。f' は行ベクトル、g' は列ベクトルになっています。
- 219 ページ:もし $f(D)$ が R^n の部分集合にならなかったら(x の次元と $f(x)$ の次元が一致しなかったら) $(f^{-1})'$ はどうなりますか
  $\longrightarrow$ おおざっぱにいうと、$f(D)$ の次元が D の次元より小さいと、逆写像がありません。(像がつぶれてしまっている)。また、$f(D)$ がより大きな次元の $\mathbb{R}^m$ にはいっていると、$f(D)$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合にならないので、$y \in f(D)$ における f^{-1} の微分とはそもそも何か?がわからなくなります。
  というわけで、ここでは考えません。
- 極座標表示の変換ってどういことですか??おなじいちじゃないんですか??
  $\longrightarrow$ 極座標を使うということは、(x, y) 座標を使っていたものを、(r, θ) 座標を使って表すということです。(x, y) 座標で考えてた $f(x, y)$ は、合成関数 $f(x(r, \theta), y(r, \theta))$ を考えることによって、(r, θ) の関数に変換されます。

質疑応答で出た質問とその答えです。

- ヤコビ行列とヤコビアンは同じ意味ですか?
  $\longrightarrow$ Jacobi 行列の行列式というものを考えることがあります。それは Jacobi 行列式と呼びます。そして、Jacobi 行列と Jacobi 行列式の両方とも、(数学的には違う対象ですが) 同じようにヤコビアン(Jacobian)と呼ばれます。教科書・文脈によります。
- G って (x, y) を (r, θ) に変換するものですよね?その写像が (r, θ) であらわされているのが結構違和感があるんですけど、、、
  $\longrightarrow$ 正確には、$r = r(x, y)$, $\theta = \theta(x, y)$ なので、これを用いれば、(x, y) で表されています。
- ベクトル値関数と多変数関数の違いはなんですか?
  $\longrightarrow$ 値がベクトルの時、ベクトル値関数と呼んでいて、変数が多数(2 以上)であるとき多変数関数と呼んでいます。なんとなくの用語なので、厳密な定義はありません。
- F とその変数 x がベクトルのときに F を x で微分するとヤコビ行列が得られるという認識であっていますか?
  $\longrightarrow$ はい。それで良いと思います。F と x がともに一変数のときに $f'(x)$ をヤコビ行列と呼んでも間違いではありませんが、やはり、(x における) 微分係数とか接線の傾きですね。
  多変数関数 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ のときは、ヤコビ行列は行ベクトルになるわけですが、これは、(x における) 勾配ベクトルと呼ばれることが多いです。

質疑応答で出た質問とその答えです。

- 極座標への変換において、$\theta = \arctan(y/x)$ だと $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ となると思うのですが、その他の θ の値を取るときは arctan の値域をいじるか定数項を足せばよいのですか?また、$x = 0$ の場合を記述するときは分けて書くべきですか?
  $\longrightarrow$ きっちりやりたいときは、その通りです。
  $\theta = \arctan(y/x)$ は $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ で y 軸の右側、
  $\theta = \arctan(y/x) + \pi$ だと、$1\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ で y 軸の左側、
  $\theta = \arctan(-x/y) + \pi/2$ は $0 < \theta < \pi$ で x 軸の上側、
  $\theta = \arctan(-x/y) + 3\pi/2$ は $\pi < \theta < 2\pi$ で x 軸の下側側、
  などが使えます。
- レポート問題についてですが、ヤコビ行列をつかった解答方法でとくべきですか?
  $\longrightarrow$ 自分の好きな方法でどうぞ。