微分積分学第一・演習 F クラス(34~40 ユニット)講義

第 6 回(5/21 :木 8:50–10:30)

担当:柴田 将敬(理学院数学系)

本日のテーマ

- 合成関数の偏微分

第 10 節 合成関数の偏微分

目標

合成関数の偏微分について学ぶ

定理 10.1 ((教科書 p.165 定理 8))

I を $\mathbb{R}$ の開区間、D を $\mathbb{R}^2$ の開集合、$f(t): I \to \mathbb{R}$ は C^1 級, $g(x,y): D \to \mathbb{R}$ は C^1 級、$f(I) \subset D$ とする。

このとき、合成関数 $f(g(x,y)): D \to \mathbb{R}$ は C^1 級で、

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(g(x,y))\Big) = f'(g(x,y))g_x(x,y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(f(g(x,y))\right) = f'(g(x,y))g_y(x,y)}$$

が成り立つ。

一変数の時の合成関数の微分の公式を、偏微分の言葉で書き下しただけなので、成立することは明らか。

定理 10.2 (連鎖公式(教科書 p.166 定理 9))

I を $\mathbb{R}$ の開区間、D を $\mathbb{R}^2$ の開集合、$\phi(t), \psi(t) : I \to \mathbb{R}$ は C^1 級, $f(x, y) : D \to \mathbb{R}$ は C^1 級、$\{(\phi(t), \psi(t)); t \in I\} \subset D$ とする。

このとき、合成関数 $g(t) := f(\phi(t), \psi(t)) : I \to \mathbb{R}$ は C^1 級で、

$$\boxed{g'(t) = f_x(\phi(t), \psi(t))\phi'(t) + f_y(\phi(t), \psi(t))\psi'(t)}$$

が成り立つ。

$x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = g(t) = f(x, y)$ と思うと、$t \mapsto (x, y) \mapsto z$ となっていて、

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

のように表せる。

証明は次のページ。

連鎖公式: chain rule

$$\lim_{t\to\alpha}\frac{f(\phi(t),\psi(t))-f(\phi(\alpha),\psi(\alpha))}{t-\alpha}$$

を計算すれば良い。$a := \phi(\alpha)$, $b = \psi(\alpha)$ とおく。まず、一次近似を使うと、

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + R(x,y),$$
$$\phi(t) = \phi(\alpha) + \phi'(\alpha)(t-\alpha) + r_1(t),$$
$$\psi(t) = \psi(\alpha) + \psi'(\alpha)(t-\alpha) + r_2(t)$$

と表せる。ここで、次が成立する。

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{R(x,y)}{|(x-a,y-b)|} = 0,\ \lim_{t\to\alpha}\frac{r_i(t)}{t-\alpha} = 0\ (i=1,2).$$

これらを使うと、

$$f(\phi(t),\psi(t)) - f(\phi(\alpha),\psi(\alpha))$$
$$= f_x(a,b)(\phi(t)-a) + f_y(a,b)(\psi(t)-\alpha) + R(\phi(t),\psi(t))$$
$$= f_x(a,b)(\phi'(\alpha)(t-\alpha)+r_1(t)) + f_y(a,b)(\psi'(\alpha)(t-\alpha)+r_2(t)) + R(\phi(t),\psi(t))$$

を得る。

$t-\alpha$ で割れば、

$$\frac{f(\phi(t),\psi(t))-f(\phi(\alpha),\psi(\alpha))}{t-\alpha}$$
$$= f_x(a,b)\left(\phi'(\alpha)+\frac{r_1(t)}{t-\alpha}\right)+f_y(a,b)\left(\psi'(\alpha)+\frac{r_2(t)}{t-\alpha}\right)+\frac{R(\phi(t),\psi(t))}{t-\alpha}$$

である。あとは $t\to\alpha$ を計算すれば良い。作り方から、

$$\frac{r_1(t)}{t-\alpha}\to 0,\ \frac{r_2(t)}{t-\alpha}\to 0 \text{ as } t\to\alpha$$

である。そして、

$$\frac{R(\phi(t),\psi(t))}{t-\alpha}=\frac{R(\phi(t),\psi(t))}{|(\phi(t)-a,\psi(t)-b)|}\frac{|(\phi(t)-a,\psi(t)-b)|}{t-\alpha}$$

であるが、$t\to\alpha$ のとき、$(\phi(t),\psi(t))\to(a,b)$ であるから、

$$\frac{R(\phi(t),\psi(t))}{|(\phi(t)-a,\psi(t)-b)|}\to 0 \text{ as } t\to\alpha.$$

そして、一次近似をもう一度使うと、

$$\left|\frac{|(\phi(t)-a,\psi(t)-b)|}{t-\alpha}\right|^2 = \left(\phi'(\alpha)+\frac{r_1(t)}{t-\alpha}\right)^2 + \left(\psi'(\alpha)+\frac{r_2(t)}{t-\alpha}\right)^2 \to (\phi'(\alpha))^2 + (\psi'(\alpha))^2$$
as $t \to \alpha$

を得る。つまり、左辺は有界である。以上をまとめると、

$$\lim_{t\to\alpha}\frac{f(\phi(t),\psi(t)) - f(\phi(\alpha),\psi(\alpha))}{t-\alpha} = f_x(a,b)\phi'(\alpha) + f_y(a,b)\psi'(\alpha)$$

となり、これが目標であった。 □

補足 10.3

同様に、2 変数関数 $f(x,y)$ と 2 変数関数 $x(s,t)$, $y(s,t)$ を合成したものの偏微分は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\Big(f(x(s,t),y(s,t))\Big) &= f(x(s,t),y(s,t))x_s(s,t) + f_y(x(s,t),y(s,t))y_s(s,t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \\
\frac{\partial}{\partial t}\Big(f(x(s,t),y(s,t))\Big) &= f(x(s,t),y(s,t))x_t(s,t) + f_y(x(s,t),y(s,t))y_t(s,t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}
\end{aligned}
$$

となる。

補足 10.4

3 変数関数 $f(x, y, z)$ と 1 変数関数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ を合成したものの微分は

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(f(x(t), y(t), z(t))\Big) \\
&= f_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + f_z(x(t), y(t), z(t))z'(t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}
\end{aligned}
$$

となる。

合成関数の偏微分の応用として、斉次関数に関する Eular の公式を紹介する。

定義 10.5 (正斉次関数)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ とする。

任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と $t > 0$ に対して $f(tx) = t^k f(x)$ が成り立つ

とき、f は次数 k の正斉次関数である、という。

例 10.6

$a, b, c \in \mathbb{R}$ を定数とする。
$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ や $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$ は次数 2 の正斉次関数。

次数 k の正斉次関数: positively homogeneous function of degree k

定理 10.7 (斉次式に関する Eular の公式)

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$, f は次数 k の正斉次関数, f は $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で C^1 級とする。このとき、

$$\boxed{x \cdot f'(x) = kf(x) \ (x \neq 0)}$$

が成り立つ。

$n=2$ のとき、$f = f(x,y)$ として証明する。
仮定より、$f(tx,ty) = t^k f(x,y)$ が任意の $x,y \in \mathbb{R}$, $t>0$ で成立している。混乱を避けるために、文字を変更すると、

$$f(tX,tY) = t^k f(X,Y)$$

である。変数が t, X, Y の 3 つあるが、両辺を t で偏微分すると、合成関数の微分法より、

$$\frac{\partial}{\partial t} f(tX,tY) = f_x(tX,tY)X + f_y(tX,tY)Y, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(t^k f(x,y)\right) = kt^{k-1} f(X,Y)$$

である。

従って、

$$f_x(tX, tY)X + f_y(tX, tY)Y = kt^{k-1}f(X, Y)$$

となり、$t = 1$ として文字を変えれば、

$$f_x(x, y)x + f_y(x, y)y = kf(x, y)$$

が任意の x, y で成り立つことが分かる。 □

C^1 級関数 $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を考える。このとき、次の二つは同値。

1. ある C^1 級関数 $g(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して、$f(x, y) = g(x + y)$ と表せる。
2. $\mathbb{R}^2$ 上で $f_x(x, y) = f_y(x, y)$ が成り立つ。

「1⟹2」1 を仮定して計算すると、

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} g(x+y) = g'(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x+y) = g'(x+y),$$
$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} g(x+y) = g'(x+y)\frac{\partial}{\partial y}(x+y) = g'(x+y)$$

となるから、2 が成立している。
「2⟹1」変数変換 $x = (s+t)/2$, $y = (s-t)/2$ を用いて、

$$F(s,t) := f\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right)$$

を考える。

合成関数の偏微分を計算すると、仮定 2 より、

$$\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) = f_x\left(\frac{s+t}{2},\frac{s-t}{2}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s+t}{2}\right) + f_y\left(\frac{s+t}{2},\frac{s-t}{2}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s-t}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}f_x\left(\frac{s+t}{2},\frac{s-t}{2}\right) - \frac{1}{2}f_x\left(\frac{s+t}{2},\frac{s-t}{2}\right) = 0$$

を得る。このことから、任意の s,t に対して

$$F(s,t) = F(s,0)$$

が成り立つ。実際、$\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数 $h(t)$ に対して、平均値の定理より、

$$h(t) - h(0) = h'(\theta t)t$$

となる $\theta \in (0,1)$ が存在する。このことから、$h'(t) = 0 \quad (\forall t)$ であれば、$h(t) = h(0) \quad (\forall t)$ となることがわかる。そして、s を固定して $h(t) = F(s,t)$ として考えれば良い。

さて、$F(s,0)$ は s のみに依る関数であるから、$g(s) := F(s,0)$ とおくと、g は 1 変数関数である。F が C^1 級だったから、g も C^1 級である。以上をまとめると、

$$F(s,t) = F(s,0) = g(s) \quad (\forall s, \forall t)$$

を得る。(x,y) と (s,t) の関係を思い出すと、

$$f(x,y) = F(x+y, x-y) = g(x+y)$$

となる。 □

行列については線形代数で学ぶ。しかし、微分積分学においても行列は顔をだす。なので、ここで行列について簡単に学んでおく。

定義 10.8 (行列)

$m, n \in \mathbb{N}$ とする。

縦に m 行、横に n 列、$m \times n$ 個の数が長方形に並んだものを<u>行列</u>と呼ぶ。並んだ数を表したいときは、$m \times n$ 行列と呼ぶ。例も参照。

例 10.9

a, b, c などは数を表す。

3×2 行列: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$, 1×3 行列: $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$

定義 10.10 (行ベクトル・列ベクトル)

$1 \times n$ 行列は、<u>行ベクトル</u>、$n \times 1$ 行列は、<u>列ベクトル</u>と呼ばれる。ここで n はベクトルの<u>サイズ</u>と呼ばれる。

行列: matrix, サイズ: size

定義 10.11 (行列の成分)

$m \times n$ 行列は $m \times n$ 個の数が並んだものであるが、それぞれの数を成分と呼ぶ。
i 行目$(1 \leq i \leq m)$ j 列目$(1 \leq j \leq n)$の成分は (m, n) 成分という。

例 10.12

2×2 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の $(1, 2)$ 成分は b, $(2, 2)$ 成分は d.

定義 10.13 (行ベクトル・列ベクトル)

$1 \times n$ 行列は、<u>行ベクトル</u>、$n \times 1$ 行列は、<u>列ベクトル</u>と呼ばれる。ここで n はベクトルの<u>サイズ</u>と呼ばれる。

$m \times n$ 行列は、サイズが n の行ベクトルが m 個縦に並んだものをみなせる。i 行目の行ベクトルとか j 列目の列ベクトルとかいう。
列ベクトルについても同様。

例 10.14

2×2 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の 2 行目の行ベクトルは $\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$.

定義 10.15 (行列の積)

$\ell \times m$ 行列 A と $m \times n$ 行列 B を考える。

このとき、A の i 番目の行ベクトル(サイズは m)と B の j 番目の列ベクトル(サイズは m)は同じサイズである。

その内積を (i, j) 成分とする新しい $\ell \times n$ 行列 C を考える。これを行列 A と B の<u>積</u>とする。この C を AB で表す。

例 10.16

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}$$

質疑応答で出た質問とその答えです。

- 前回のレポート問題の(2)、(3)は、C^n 級の論述なしに計算を進めても問題ないのですか?
  $\longrightarrow$ はい。具体的な関数で C^∞ 級がわかっている・容易にわかる場合、気にせず計算しましょう。
- 188 ページ(講義中スライドで 189 ページ)の最後が 0 になるのがわかりません
  $\longrightarrow$ 有界なものと、極限が 0 であるものの積は、極限が 0 になります。数列で書くと、有界な数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と極限が 0 である数列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して、$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ となります。
  証明するなら、有界性より、$-M \leq a_n \leq M$ が成り立つような $M > 0$ がとれるので、
  $-Mb_n \leq a_n b_n \leq Mb_n$ となっていて、極限をとってはさみうちの原理を用いれば良いです。
- 単なる興味なんですけど、Eular の公式を問題を解くときに使うことってあったりするんですか??
  $\longrightarrow$ 私は論文で使ったことはあります。が、まあないでしょう。
  ちょっと調べたところ、経済学・物理学・化学などで使われることがあるようです。
- T の一変数関数としたときに平均値の対偶が成り立つのにそこから s を変数としていいのはなぜですか
  $\longrightarrow$ 講義中の説明はちょっと良くなかったかもしれません。少し整理したので、pp.196–197 も参照して下さい。