微分積分学第一・演習 F クラス(34~40 ユニット)講義

第 5 回(5/19 : 火 10:45–12:25)

担当:柴田 将敬(理学院数学系)

本日のテーマ

- 偏微分(続き)

定義 9.7 (高階導関数)

I を $\mathbb{R}$ の開区間、$f : I \to \mathbb{R}$, $f = f(x)$ と $f'(x)$ は I 上で微分可能とする。

このとき、$f'(x)$ の導関数を f の2 階導関数といい、

$$f''(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

で表す。同様に、$n \in \mathbb{N}$ に対して、f のn 階導関数を考え、

$$f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

で表す。

なお、$'$ と括弧の使い分けは、見やすさによる。
通常使われるのは、$f', f'', f''' = f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}, \ldots$ といった具合。

---

n 階導関数: derivative of order n, nth derivative

定義 9.8 (C^n 級関数)

I を $\mathbb{R}$ の開区間、$f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ とする。

f が I 上で n 階微分可能で、n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ が I 上で連続であるとき、f は I 上で<u>C^n 級</u>であるという。また、そのような f を I 上の<u>C^n 級関数</u>と呼ぶ。

また、f が何階でも微分可能なとき、f を<u>C^∞ 級関数</u>とか、<u>滑らかな関数</u>とかいう。

補足 9.9

- n 階微分可能ということは、C^i 級 $(i = 1, \ldots, n-1)$ でなければならない。
- 連続関数のことを、C^0 級関数ということがある。
- 「滑らかな」というのが、「今考えている微分の計算が不都合なく出来るくらいに」という意味のときがある。例えば、2 階微分を考えているときは C^2 級を指す。

---

f が C^n 級: f is of class C^n, なめらかな関数: smooth function

定義 9.10 (高階偏導関数)

f が領域 U 上で x 偏微分可能であるとき、f_x は U 上の関数であり、さらに f_x の x 偏導関数や y 偏導関数を考えることが出来る。それらは、f_{xx}, f_{xy} などと表される。f_x や f_y は<u>1 階偏導関数</u>、それらの偏導関数

$$((f_x)_x =)f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad ((f_x)_y =)f_{xy} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} =\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

$$((f_y)_x =)f_{yx} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} =\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad ((f_y)_y =)f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

は<u>2 階偏導関数</u>と呼ばれる。
同様にして 3 階偏導関数、4 階偏導関数など<u>高階偏導関数</u>を考えることが出来る。

補足

偏微分も極限であるから、以前述べたように、無条件で順序が交換できるわけではない。
なので、記号の使い方(x と y の順番)も意味がある。

例 9.11 (教科書 p.162 例 4)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

に対して、$f_{xy}(0,0)=?\quad f_{yx}(0,0)=?$

偏微分を計算すると、

$$f_x(x,y)=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\quad ((x,y)\neq(0,0))$$

となる。従って、$x=0$ とすると、

$$f_x(0,y)=-y,\ (y\neq 0)$$

である。上の式は $y=0$ で成り立つか分からないので、$f_x(0,0)$ は定義に従って計算すると、

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$$

を得る。

まとめると、

$$f_x(0,y) = -y,\ (\forall y \in \mathbb{R})$$

であるので、y で偏微分して、$f_{xy}(0,y) = -1$. $y = 0$ として

$$f_{xy}(0,0) = -1$$

が従う。
一方、

$$f_y(x,y) = \frac{x^5 + 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2} \quad ((x,y) \neq (0,0))$$

となる。従って、$y = 0$ とすると、

$$f_y(x,0) = x,\ (x \neq 0)$$

である。$f_y(0,0)$ は定義に従って計算すると、

$$f_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0$$

を得る。

まとめると、

$$f_y(x,0) = x,\ (\forall x \in \mathbb{R})$$

であるので、x で偏微分して、$f_{yx}(x,0) = 1$. $x = 0$ として

$$f_{yx}(0,0) = 1.$$

結局、

$$f_{xy}(0,0) = -1 \neq 1 = f_{yx}(0,0)$$

となっていることが分かる。 $\square$

定理 9.12 (Schwarz の定理(教科書 p.163 定理 6))

$f = f(x, y)$ は開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された関数、$(a, b) \in U$ とする。

U 上で f_x, f_y, f_{xy} が存在し、f_{xy} が (a, b) で連続ならば、f_y は (a, b) で x 偏微分可能であり、$\boxed{f_{yx}(a, b) = f_{xy}(a, b)}$ が成り立つ。

f が C^2 級(f_{xy}, f_{yx} が連続)のとき、$f_{xy} = f_{yx}$ を示す。

簡単のため、$(a, b) = (0, 0)$ として示す。

$$(*) = f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0)$$

を考える。$g(x) = f(x, y) - f(x, 0)$ とおくと、

$$(*) = g(x) - g(0) = g'(s)x$$

が成り立つ。ここで、平均値の定理を用いた。そして、s は 0 と x の間の数。さらに、

$$g'(s) = f_x(s, y) - f_x(s, 0) = f_{xy}(s, t)y$$

となる。ここで、平均値の定理を $y \mapsto f_x(s, y)$ に対して用いた。t は 0 と y の間の数。

まとめると、

$$(*) = f_{xy}(s,t)xy$$

を得る。一方で、$h(y) = f(x,y) - f(0,y)$ とおく。すると、

$$(*) = h(y) - h(0) = h'(b)y$$

が成り立つ。ここで、平均値の定理を用いた。そして、b は 0 と y の間の数。さらに、

$$h'(b) = f_y(x,b) - f_y(0,b) = f_{yx}(a,b)y$$

となる。ここで、平均値の定理を $x \mapsto f_y(x,b)$ に対して用いた。a は 0 と x の間の数。まとめると

$$f_{xy}(s,t)xy = (*) = f_{yx}(a,b)xy$$

であるから、

$$f_{xy}(s,t) = f_{yx}(a,b)$$

を得る。$(x,y) \to (0,0)$ のとき、$(s,t) \to (0,0)$, $(a,b) \to (0,0)$ であって、f_{xy} と f_{yx} は仮定より連続なので、結論が従う。 $\square$

定義 9.13 (C^n 級関数)

開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 f を考える。$n \in \mathbb{N}$ に対して、f の全ての(高々) n 階導関数が存在し、それらが全て U 上連続であるとき、f を U 上で<u>C^n 級</u>であるという。

補足 9.14

Schwarz の定理より、開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^2 関数 $f = f(x,y)$ に対して、$f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つ。さらに、f が C^n 級ならば、n 階の偏導関数は、偏微分の順序に依らない。

従って、n 階の偏導関数は、

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^\ell \partial y^{n-\ell}} \quad (0 \leq \ell \leq n)$$

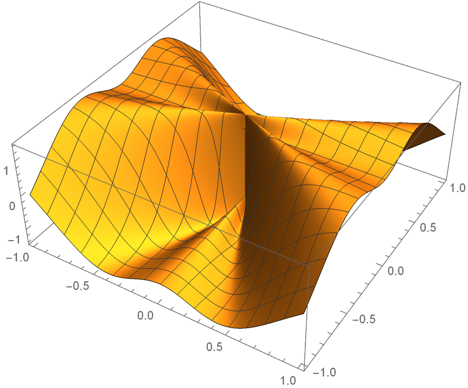
で表せる。

例 9.15 (教科書 p.162 例 4)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ は C^2 級になっていない。

$$f_{xy}(x,y)=\frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}$$

のグラフを Mathematica で描いたもの



補足 9.16

多項式関数、三角関数、指数関数、対数関数、それらの逆関数などは、定義されている開区間では C^∞ 級となることが知られている。
(ここでは端点での可微分性などは考えない)

微分可能な関数の和、差、積、商(分母が $\mathbf{0}$ とならない開区間で考える)、合成関数もまた微分可能であったから、C^∞ 級関数の和、差、積、商(分母が $\mathbf{0}$ とならない開区間で考える)、合成関数もまた C^∞ 級関数である。

多変数関数であっても、これらの C^∞ 級関数で具体的に表された関数は、定義されている開集合上では C^∞ 級関数となる。

一変数関数のグラフ $y = f(x)$ について、$x = a$ における接線(の傾き)を求めることが、微分法の目的であった。それは $x = a$ における 1 次近似

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x-a) \text{ as } x \to a$$

を求めることに他ならなかった。($\sim$ は近似を表す)

このことを考えると、2 変数関数については、グラフ $z = f(x,y)$ の接平面が求まって良いはずである。偏微分は、変数を 1 つに制限した微分だったから、

$$f(x,b) \sim f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) \text{ as } x \to a,$$
$$f(a,y) \sim f(a,b) + f_y(a,b)(y-b) \text{ as } y \to b$$

といったことは分かる。しかし、これは、$f(x,y)$ を近似したものにはなっていない。

平面の方程式

$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, $d \in \mathbb{R}$ に対して、

$$ax + by + cz = d$$

は平面の方程式と呼ばれる。これは、

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}; ax + by + cz = d\}$$

が $\mathbb{R}^3$ 内の平面を表すからである。ここで、(a, b, c) は平面の法ベクトルになっている。

また、(a, b, c) を通り、(p, q, r) が法ベクトルであるような平面は

$$p(x - a) + q(y - b) + r(z - c) = (p, q, r) \cdot (x - a, y - b, z - ck) = 0$$

と表せる。

定義 9.17 (一次近似)

U を $\mathbb{R}^2$ の開集合、$f(x,y)$ を U 上の関数、$(a,b) \in U$ とする。

$$f(x,y) = \underline{f(a,b) + A(x-a) + B(y-b)} + R(x,y), \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{R(x,y)}{|(x,y)-(a,b)|} = 0$$

を満たす $A, B \in \mathbb{R}$, $R(x,y)$ が存在するとき、下線部を f の<u>一次近似</u>と呼ぶ。

発展的話題

上記の A, B, $R(x,y)$ が存在する、つまり、とき、f は (a,b) で<u>全微分可能(微分可能)</u>という。

補足 9.18

- 一次近似が存在することがわかれば(すなわち f が (a,b) で全微分可能ならば)、$A = f_x(a,b)$, $B = f_y(a,b)$ となることがわかる。
- 一変数関数では、$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R(x)$, $\lim_{x\to a} \frac{R(x)}{|x-a|} = 0$ であった。

定義 9.19 (接平面)

U を $\mathbb{R}^2$ の開集合、$f(x,y)$ を U 上の関数、$(a,b) \in U$ とする。さらに、f の (a,b) における一次近似が存在すると仮定する。このとき、

$$\boxed{z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)}$$

で定まる平面を、グラフ $z = f(x,y)$ の (a,b) における接平面と呼ぶ。

定理 9.20 (接平面の存在(教科書 p.164 定理 7 も参照))

U を $\mathbb{R}^2$ の開集合、$f(x,y)$ を U 上の C^1 級関数、$(a,b) \in U$ とする。

このとき、f は (a,b) で一次近似できる。つまり、(a,b) における $z = f(x,y)$ の接平面が存在する。

次のページで証明する。

$R(x,y) := f(x,y) - (f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b))$ に対し、

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{R(x,y)}{|(x,y)-(a,b)|} = 0$$ を示せば良い。

平均値の定理より、

$$f(x,y) - f(a,b) = f(x,y) - f(a,y) + f(a,y) - f(a,b)$$
$$= f_x(s,y)(x-a) + f_y(a,t)(y-b)$$

が成り立つ。ここで、s は x と a の間の数、t は a と b の間の数である。これを用いると、

$$\frac{R(x,y)}{|(x,y)-(a,b)|}$$
$$= (f_x(s,y) - f_x(a,b))\frac{x-a}{|(x,y)-(a,b)|} + \left(f_y(a,t) - f_y(a,b)\right)\frac{y-b}{|(x,y)-(a,b)|}$$

となっている。

ここで、f は C^1 級だったから、f_x と f_y は (a,b) で連続であり、作り方から、$(x,y) \to (a,b)$ のとき、$(s,y) \to (a,b)$, $(a,t) \to (a,b)$ となっている。従って、

$$f_x(s,y) - f_x(a,b) \to 0,\ f_y(a,t) - f_y(a,b) \to 0 \text{ as } (x,y) \to (a,b)$$

がわかる。また、

$$\frac{|x-a|}{|(x,y)-(a,b)|} = \frac{|x-a|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{(x-a)^2}} = 1$$

であり、同様に、

$$\frac{|y-b|}{|(x,y)-(a,b)|} \leq 1$$

である。以上をまとめれば、

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{R(x,y)}{|(x,y)-(a,b)|} = 0$$

が従う。

余談: 微分の記号

x における接線の傾きが $f'(x)$ から決まるように、2 変数関数 $f = f(x, y)$ の (x, y) における接平面の「傾き」は、$f_x(x, y)$ と $f_y(x, y)$ の両方で決まる。

なので、偏導関数の組 $(f_x(x, y), f_y(x, y))$ (列ベクトルで表したり他の書き方をすることもある)を $f'(x, y)$ や $Df(x, y)$ などと表す。$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ としておいて、$\dfrac{df}{d\boldsymbol{x}}$ と表記することもある。

この意味でも、微分を表すのに使う記号 d や $'$ と偏微分を表すのに使う記号 ∂ は明確に使い分けるべきである。

定義 9.21 (方向微分)

U を $\mathbb{R}^2$ の開集合、$f(x,y): U \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in U$, $(s,t) \neq (0,0)$ とする。

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+sh, b+th) - f(a,b)}{h}$$

を、f の (a,b) における (s,t) に沿った方向微分と呼ぶ。

補足 9.22

$h \mapsto (a+sh, b+th)$ は (a,b) を通り、(s,t) 方向に延びる直線を表し、そのパラメータが h である。
$F(h) := f(a+sh, b+th)$ とすると、F はその直線上での f の値を表している。

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+sh, b+th) - f(a,b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = F'(0)$$

であるから、$h = 0$ (点 (a,b) に対応する)における F の傾きが方向微分に他ならない。

方向微分: directional derivative

補足 9.23

U を $\mathbb{R}^2$ の開集合、$f(x,y):U\to\mathbb{R}$, $(a,b)\in U$, $(s,t)\neq(0,0)$ とする。
さらに、f は U 上で C^1 級であると仮定する。

このとき、方向微分は

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+sh,b+th)-f(a,b)}{h}=f'(a,b)\cdot(s,t)$$

となる。ここで、$f'(a,b)=(f_x(a,b),f_y(a,b))$ である。

これは、先ほどの $R(x,y)$ の評価と同じようにして、証明出来る。
(一次近似の式を $(x,y)=(a+sh,b+th)$ とおいて適用することも出来る。)
詳しい計算はパス。

U を $\mathbb{R}^2$ の開集合、$f(x,y): U \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in U$, さらに、f は U 上で C^1 級であると仮定する。

まず、$f'(a,b) = (0,0)$ だと、接平面が傾いていないことを意味するのは明らか。
$f'(a,b) \neq (0,0)$ とする。

方向微分において、$(\cos\theta, \sin\theta)$ に沿った方向微分は、

$$F(\theta) := f'(a,b) \cdot (\cos\theta, \sin\theta)$$

である。このことから次がわかる。

$F(\theta)$ が最大になるのは、$f'(a,b)$ と $(\cos\theta, \sin\theta)$ が同じ向き、
$F(\theta)$ が最小になるのは、$f'(a,b)$ と $(\cos\theta, \sin\theta)$ が反対向きの時である。
さらに、最大値・最小値は $|f'(a,b)|$, $-|f'(a,b)|$ となっている。

いいかえれば、斜面 $z = f(x,y)$ の上をスキーで滑っていて、今の場所が (a,b) とすると、$-f'(a,b)$ が一番斜面が急になっている方向で、その斜面の傾きの大きさを表すのが $|f'(a,b)|$ になっている。

質疑応答で出た質問とその答えです。

- 方向微分の内積の式のところをイメージで理解することってできないですか??
  $\longrightarrow$ 私にはあまり上手く説明できません。補足 9.23 とか f' の意味のところの記述とかを参考にしてください。方向微分の定義を見て、補足 9.23 を証明したりして、考えてみて下さい。
- $(2,4)$ に沿った方向微分は $(1,2)$ に沿った方向微分の 2 倍になりますか?
  $\longrightarrow$ はい。
- レポート問題の $\exp$ とはなんですか?
  $\longrightarrow$ 指数関数です。$\exp(x) = e^x$ です。
- 二回微分での偏微分の交換が成り立っていない例を示す問題で、$f_y(0,0)$ を求めた意味ってありますか?
  $\longrightarrow$ 定義の仕方から、$f(x,y)$ は $(0,0)$ 以外では有理関数であって分母が 0 でないので、C^∞ 級となっている一方で、$(0,0)$ では偏微分可能かどうかもわかりません。なので、偏微分を定義に従って計算する必要があります。
- 方向微分の沿っているベクトルを 2 倍にしたら値も 2 倍になるのが不思議です。結局h→0にしてるのに。
  $\longrightarrow$ 定義 9.21 で (s,t) が二倍になると、ある意味、f の変化も二倍になるので。うまく説明できませんが、定義式などみて考えてみて下さい。