微分積分学第一・演習 F クラス(34~40 ユニット)講義

第 4 回(5/14 :木 8:50–10:30)

担当:柴田 将敬(理学院数学系)

本日のテーマ

- 広義積分(続き)
- 多変数関数(極限、連続性)

広義積分は極限で定義された。極限が具体的に求まる場合は計算すれば良いが、具体的に計算できなくても、広義積分が存在することははっきりさせたい。そのために使える判定法を紹介する。

定理 7.11

$-\infty < a < b \leq \infty$, $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ は連続とする。($b = \infty$ でも良いことに注意。)

(i) $[a, b)$ 上で $|f(x)| \leq g(x)$ が成立する。

(ii) 広義積分 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ が存在する。

(i) と (ii) が成立するとき、広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は存在する。

同様に、$-\infty \leq a < b < \infty$, $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ は連続とする。

(i) $(a, b]$ 上で $|f(x)| \leq g(x)$ が成立する。

(ii) 広義積分 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ が存在する。

(i) と (ii) が成立するとき、広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は存在する。

例 7.12

広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ は存在する。

「広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ は存在する $\Longleftrightarrow$ 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ は存在する」となっていることを用いる。

まず、$|e^{-x^2}| \leq e^{-x}$ $(x \in [1, \infty))$ が成り立つ。
次に、

$$\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 0 + e^{-1}$$

となっていて、広義積分 $\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx$ は存在する。

定理 7.11 を使えば、$\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ は存在することが従う。 □

なお、上の計算で、$\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty}$ は $\lim_{t\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^{t}$ の意味。

同様の考え方で、広義積分が発散することを示すこともできる。

定理 7.13

$-\infty < a < b \leq \infty$, $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ は連続とする。($b = \infty$ でも良いことに注意。)

(i) $[a, b)$ 上で $0 \leq g(x) \leq f(x)$ が成立する。

(ii) 広義積分 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = \infty$ である。

(i) と (ii) が成立するとき、広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \infty$ が成り立つ。

同様に、$-\infty \leq a < b < \infty$, $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ は連続とする。

(i) $(a, b]$ 上で $0 \leq g(x) \leq f(x)$ が成立する。

(ii) 広義積分 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = \infty$ である。

(i) と (ii) が成立するとき、広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \infty$ である。

例 7.14

広義積分 $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\log x} = \infty$.

まず、

$x > 1$ において、$x > \log x > 0$, つまり、$\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\log x}$

である。また、計算すれば、

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_2^\infty = \infty$$

となる。定理 7.13 を使えば、$\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\log x} = \infty$ が従う。

□

補足 7.15

要は、収束・発散が分かっている関数と比較することで、収束・発散を示せる。
(本質的に、はさみうちの原理である。)

比較に使う関数は簡単な方が分かりやすい。例えば、

$a > 0$, $p \in \mathbb{R}$ とする。
$p > 1$ なら $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ は収束。 $p \leq 1$ なら $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \infty$.

$a > 0$, $p \in \mathbb{R}$ とする。
$p < 1$ なら $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^p}$ は収束。 $p \geq 1$ なら $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^p} = \infty$.

第 8 節 多変数関数

目標

多変数関数の連続性について学ぶ。

定義 8.1

多変数関数 $n \in \mathbb{N}$, D を $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合とする。

D の点を $\mathbb{R}$ の点に対応させる写像 $f : D \to \mathbb{R}$ を$\underline{n\ \text{変数関数}}$と呼ぶ。

例 8.2

東経 x 度、北緯 y 度における現在の標高を $f(x, y)$ メートルとする。(x, y) が動く範囲(定義域)は適当に定めれば、f は 2 変数関数である。

例 8.3

ある 100 名の生徒の身長を $x_1, \dots, x_{100}$ メートルとすれば、その平均の身長は $(x_1 + \cdots + x_{100})/100$ メートルである。

$(x_1, \dots, x_{100}) \mapsto (x_1 + \cdots + x_{100})/100$ は 100 変数関数。

多変数関数: multivariable function, 一変数関数: singlevariable function, n 変数関数: n-variable function

定義 8.4 (ノルム)

$\mathbb{R}^n$ の点 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して、

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{x \cdot x} \ (\cdot \text{ は内積})$$

とおく。このように定まる $|\ |$ を(Euclid)ノルムという。

ノルムは、$\mathbb{R}^n$ 上で定義された n 変数関数になっている。

定義 8.5 (距離)

$\mathbb{R}^n$ の 2 点 $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ の(Euclid)距離を

$$d(x, y) := |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

で表す。

Euclid ノルム: Euclidean norm, Euclid 距離: Euclidean distance

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}| \text{ や } |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}| + |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}|$$

が成り立つ。これは<u>三角不等式</u>と呼ばれる。

計算すれば、

$$(|\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|)^2 - |\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 + 2|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| - (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = 2(|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$$

となる。ここで、内積の性質(Schwarz の不等式とも呼ばれる)より

$$|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| \geq \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$$

であるから、三角不等式が成立することがわかる。

三角不等式: triangle inequality

定義 8.6 (開球・閉球)

$a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ とする。
$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n ; |x - a| < r\}$ を a 中心半径 r の<u>開球</u>、
$\overline{B_r(a)} := \{x \in \mathbb{R}^n ; |x - a| \leq r\}$ を a 中心半径 r の<u>閉球</u>、という。

原点を中心とするときは、a を略して、B_r や $\overline{B_r}$ などと書くこともある。

$n = 2$ のときは、<u>開円盤</u>、<u>閉円盤</u>ともいう。

開球: open ball, 閉球: closed ball, 開円盤: open disk, 閉円盤: closed disk

定義 8.7 (開集合)

A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。

任意の $x \in A$ に対して、$\epsilon = \epsilon(x) > 0$ を十分小さくすれば、$B_\epsilon(x) \subset A$ となる。

このとき、A を開集合という。

補足 8.8

- 開球は開集合となる。
- 開集合の定義を言い換えると、「A は境界を含まない」となる。

例(追加)

$A = (0,1) \times (0,1) \cup \{(0,0)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではない。
なぜなら、$(0,0)$ 中心半径 ϵ の開円盤 B_ϵ を考えると、$B_\epsilon \subset A$ とはならない。(どんなに小さな ϵ でも A からはみ出す。)

開集合: open set

定義 8.9 (閉集合)

A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。

$\mathbb{R}^n \setminus A$ が開集合である。

このとき、A を閉集合という。

補足 8.10

- 閉球は閉集合となる。
- 閉集合の定義を言い換えると、「A は境界をすべて含む」となる。

閉集合: closed set

参考までに、教科書第 6 章 §1 の定義をまとめておく。(開集合・閉集合の定義は先ほどと同じになる)

定義: 補集合

$A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、$A^c := \{x \in \mathbb{R}^n ; x \notin A\}$ を A の補集合という。

定義: 内点

$A \subset \mathbb{R}^n$, $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ とする。

$\epsilon = \epsilon(x, y) > 0$ が存在して、$B_\epsilon(x, y) \subset A$ が成り立つ。

このとき、(x, y) を A の内点という。

定義: 外点

$A \subset \mathbb{R}^n$, $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ とする。

ある $\epsilon = \epsilon(x, y) > 0$ が存在して、$B_\epsilon(x, y) \cap A = \varnothing$ ($\Longleftrightarrow B_\epsilon(x, y) \subset A^c$)が成り立つ。

このとき、(x, y) を A の外点という。

定義: 境界点

$A \subset \mathbb{R}^n$, $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ に対して、(x, y) が A の内点でも外点でもないとき、(x, y) を A の境界点という。

任意の $\epsilon > 0$ に対して、$B_\epsilon(x, y) \cap A \neq \emptyset$ かつ $B_\epsilon(x, y) \cap A^c \neq \emptyset$ となっている。

定義: 開集合

$A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、A のすべての点が A の内点であるとき、A を開集合という。

定義: 閉集合

$A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、A^c が開集合であるとき、A を閉集合という。

定義: 境界

$A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、A の境界点全体を、A の境界という。∂A で表す。

補集合: complement, 内点: interior point, 外点: exterior point, 境界点: boundary point, 境界: boundary

開集合・閉集合の性質

次が成立する。

- A, B が開集合なら、$A \cup B$ や $A \cap B$ も開集合。可算個の開集合の和も開集合。
- A, B が閉集合なら、$A \cup B$ や $A \cap B$ も閉集合。可算個の閉集合の共通部分も閉集合。
- $\varnothing$ や $\mathbb{R}^n$ は開集合でも閉集合でもある。(そのような集合はこれだけ。)
- $\mathbb{R}^n$ 上の連続関数 f と $c \in \mathbb{R}$ に対して、$\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > c\}$ は開集合。
- $\mathbb{R}^n$ 上の連続関数 f と $c \in \mathbb{R}$ に対して、$\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \geq c\}$ は閉集合。

定義 8.11 (連結)

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が次を満たすとき、A は連結(より詳しくは弧状連結)であるという。

> 任意の $P, Q \in A$ に対して、P と Q を結ぶ「曲線」で、A に含まれるものが存在する。

補足 8.12

- 「曲線」の部分は、折れ線、つまり、線分をつなげたもの、におきかえて良い。
- 要は、「つながっている」集合を連結な集合と呼ぶ。
- $\mathbb{R}$ の部分集合で連結なものは、区間に他ならない。

定義 8.13 (領域)

連結な開集合のことを領域という。

連結: connected, 領域: domain (定義域も domain なので、区別するときは、定義域のことを domain of definition とかいう。)

ここまでは、一般に $\mathbb{R}^n$ の設定で述べたが、以後、簡単のため、$n=2$、つまり、$\mathbb{R}^2$ の場合だけ述べる。($\mathbb{R}^n$ の場合でも考え方は同じ。)

定義 8.14 (点列の収束)

数列と同様に、平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点列 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を考える。ある点 $(x_\infty, y_\infty) \in \mathbb{R}^2$ が存在して、

$$\lim_{n\to\infty} |(x_n, y_n) - (x_\infty, y_\infty)| = 0$$

となっているとき、$\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は (x_∞, y_∞) に収束するという。
$\boxed{\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_\infty, y_\infty)}$ とか $\boxed{(x_n, y_n) \to (x_\infty, y_\infty) \text{ as } n \to \infty}$ などと表す。

補足 8.15

すぐにわかるように、

$$|x_n - x_\infty|, |y_n - y_\infty| \leq |(x_n, y_n) - (x_\infty, y_\infty)| \leq |x_n - x_\infty| + |y_n - y_\infty|$$

となっているので、$n \to \infty$ のとき、「$x_n \to x_\infty$ かつ $y_n \to y_\infty$」と「$(x_n, y_n) \to (x_\infty, y_\infty)$」は同値である。(はさみうちの原理)

定義 8.16 (関数の極限)

U を $\mathbb{R}^2$ の開集合、$(a,b)\in U$、f は $U\setminus\{(a,b)\}$ 上で定義される実数値関数、$A\in\mathbb{R}$ とする。

(x,y) が (a,b) に限りなく近づくとき、$f(x,y)$ が A に限りなく近づく。

より詳しくは、

任意の点列 $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}\subset U\setminus\{(a,b)\}$ で $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(a,b)$ を満たすものに対して、$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=A$ が成り立つ。

とする。このとき、「(x,y) が (a,b) に収束するとき $f(x,y)$ は A に収束する」などといい、$\boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A}$ とか $\boxed{f(x,y)\to A \text{ as } (x,y)\to(a,b)}$ などと表す。

補足 8.17

教科書では、U を開集合に限らないより一般の集合とした場合の定義が述べてある(p.158)。

(a,b) 中心の極座標を用いて、$(x,y)=(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$ と表す。($r\geq 0$, $\theta\in\mathbb{R}$)
このようにすると、$|(x,y)-(a,b)|=r$ だから、

$(x,y)\to(a,b)$ は、$r\to 0+$ と言い換えることが出来る。

例 8.18 (教科書 p.159 例 1)

$f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ のとき、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=?$.

計算すると、

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)|=|r\cos\theta\sin\theta|\leq r\to 0\ (r\to 0+)$$

となる。これは、θ が例えどのように r に依存して変化しようと、$r\to 0$ ならば、
$f(r\cos\theta, r\sin\theta)\to 0$ となっていることを意味している。(はさみうちの原理)

同じことであるが、$(x,y)\to(0,0)$ なら、(x,y) がどのように動こうと、$f(x,y)$ が 0 に限りなく近づくことがわかる。従って、$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ である。 □

例 8.19 (教科書 p.159 問 8 (2))

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$ のとき、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos^2\sin\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}$$

であるから、θ を固定すると、

$\sin\theta = 0$ なら、$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0 \to 0 \ (r \to 0+)$,

$\sin\theta \neq 0$ なら、$f(r\cos\theta, r\sin\theta) \to \dfrac{0}{0+\sin^2\theta} = 0 \ (r \to 0+)$

となる。つまり、(x,y) を直線的に $(0,0)$ に近づけるとき、どの方向から近づけても、$f(x,y) \to 0$ となっている。

次へ続く。

さて、別な近づけ方として、(t, t^2) で $t \to 0$ を考える。もちろん $(t, t^2) \to (0, 0)$ $(t \to 0)$ となっている。このとき、

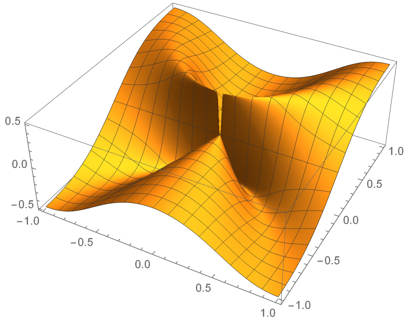
$$f(t, t^2) = \frac{t^4}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \ (t \to 0)$$

となっている。
結局、(x, y) を $(0, 0)$ に近づける近づけ方によって極限値が変わってしまう。これは、$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ が存在しないことを意味する。 □

参考まで、
Mathematica で描いたグラフを載せておく。
原点の近くでは f を描き切れないが、

$y = x^2$ に沿って値が $1/2$,
$y = -x^2$ に沿って値が $-1/2$

になっていることが見て取れる。



補足 8.20

定義を考えれば分かることであるが、

- $\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)$.
- $\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))$.
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

は全て意味が違う。(例えば $f(x,y) = y^2/(x^2+y^2)$, $a = b = 0$.)

従って、どれかが収束してどれかが収束しないとか、収束するけど極限値が異なるとかいうことも起こる。

これは二つの極限の順序交換が出来るとは限らないことを意味し、(偏)微分や積分も極限の一種であるから、それらの順序交換がいつでも出来るわけではないことを示唆している。

もちろん、f が良い条件を満たす(例えば f が (a,b) の近くで連続とか)ならば、全て収束し、極限値は一致する。

定義 8.21 (連続性)

U を $\mathbb{R}^2$ の開集合、$f : U \to \mathbb{R}$ とする。

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ である

とき、$f(x,y)$ は (a,b) で連続であるという。

定義 8.22 (連続関数)

U を $\mathbb{R}^2$ の開集合、$f : U \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in U$ とする。

任意の $(a,b) \in U$ に対して $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ である

とき、$f(x,y)$ は U 上で連続であるという。また、このような f を U 上の連続関数という。

補足 8.23

連続関数の和・差・積・商が連続とか、連続関数の合成関数(1 変数関数と多変数関数の合成なども含む)は連続とかは、1 変数の場合と同様に成り立つ。

具体的な関数の連続性については、次が分かっていれば(後は関数の和・差・積・商・合成を考えれば良いので)十分だろう。

$\mathbb{R}$ の区間 I 上で定義された連続関数 $f(x)$ を考える。

2 変数関数 $g(x,y) := f(x)$ は $I \times \mathbb{R} := \{(x,y); x \in I, y \in \mathbb{R}\}$ で連続である。

2 変数関数 $h(x,y) := f(y)$ は $\mathbb{R} \times I := \{(x,y); x \in \mathbb{R}, y \in I\}$ で連続である。

例 8.24

$f(x,y) = \sin x$ は $\mathbb{R}^2$ で連続、$f(x,y) = \log x$ は $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ で連続。

一般の集合 A に関して、A 上で定義された関数の連続性を定義するためには、境界での連続性を考えなければならない。1 変数関数の場合、区間の端点での右・左連続性を考えれば良かったが、多変数関数ではそうはいかないので、定義は少し面倒となる。
この講義では、教科書の定義よりも少し条件の厳しい(適用できる関数が減る可能性がある)次の定義を採用する。

定義 8.25 (連続関数(一般の場合))

A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合、B は A を含む開集合。$f : B \to \mathbb{R}$ が連続関数であるとき、
f を A 上の連続関数という。

例 8.26

f が $(-1, 1) \times (-1, 1)$ 上の連続関数であれば、f は $[a, b] \times [c, d]$ 上の連続関数。ただし、
$-1 < a < b < 1$, $-1 < c < d < 1$.

1 変数関数のときと同じように次の定理が成り立つ。

定理 8.27 (最大値・最小値の定理)

E を $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合とする。E 上の連続関数は最大値・最小値を持つ。

(有界集合: 十分おおきな M を考えれば、$B_M(0)$ に含まれるような集合)

第 9 節 偏微分

目標

偏微分や偏導関数に関する公式について学ぶ

定義 9.1 (偏微分係数)

U を $\mathbb{R}^2$ の開集合、$(a,b) \in U$、$f = f(x,y)$ は U 上で定義された実数値関数とする。
$x \mapsto f(x,b)$ は x の 1 変数関数であるから、$x = a$ での微分可能性や微分係数を考えることが出来る。この考え方で、

$$f_x(a,b) := \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

が存在するとき、f は (a,b) で x に関して偏微分可能といい、$f_x(a,b)$ を (a,b) での f の x に関する偏微分係数という。y についても同様にして

$$f_y(a,b) := \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

を定める。

偏微分係数: ?, 偏微分可能: partially differentiable

定義 9.2 (偏導関数)

U を $\mathbb{R}^2$ の開集合、$f = f(x, y)$ は U 上で定義された実数値関数、任意の $(a, b) \in U$ において、f は (a, b) で x に関して偏微分可能であるとする。

このとき、$(a, b) \mapsto f_x(a, b)$ (文字を変えれば $(x, y) \mapsto f_x(x, y)$)で定まる関数 $f_x : U \to \mathbb{R}$ を、f の x に関する偏導関数と呼ぶ。同様に、f_y も考える。

補足 9.3

- 2 変数関数 $f = f(x, y)$ について、1 番目の成分 x に関して偏微分したものが f_x, 2 番目の成分 y に関して偏微分したものが f_y である。$f_x(a, b)$ は f_x の点 (a, b) での値を表す。なので、初めに、$f(s, t)$ を考えると宣言してあれば、その偏導関数は f_s, f_t となる。
- $f_x(x, y)$ に $x = t^2$ を代入したら、$f_x(t^2, y)$ であって、$f_{t^2}(t^2, y)$ などとは書かない。
- 定義からわかるように、具体的な関数に対して、偏導関数を求める(偏微分する)計算は、1 変数関数の微分の計算と全く同じ。どの変数に注目して微分するかというだけである。

偏導関数: partial derivative

補足 9.4

- f_x は $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と表すこともある。実は偏微分と微分は違う概念であるから、微分に使う記号(d とか $'$ とか)を用いてはならない。これは、微分のときは成り立っていた演算規則が成り立たないことも背景にある。

  例えば、$z = f(x)$ のとき $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dz}}$ と表すことが出来たが、
  $z = f(x, y)$ に対して、$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}$ は間違い。

- 2 変数関数でも、微分(偏微分と区別するために全微分と呼んだりする)の概念はある。時間があれば、この講義では微分の概念も紹介する予定。d や $'$ はそこで使われる。
  例えば、$f'(x, y)$ と書いて (f_x, f_y) のことを指したりする。

例 9.5

$f(x,y) = x^y \ (x > 0, y > 0)$ の偏導関数を求める。

一変数関数に関する公式(t を変数、a を定数とする)

$(t^a)' = at^{a-1}$ や $(a^t)' = a^t \log a$

を用いて計算すれば、

$$\frac{\partial}{\partial x}x^y = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}x^y = x^y \log x$$

となる。 □

例 9.6

$f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$ $(x \neq 0)$ の偏導関数を求める。

計算すれば、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\frac{y}{x}\right) &= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(y/x)}{1+(y/x)^2} = \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2},\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\frac{y}{x}\right) &= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(y/x)}{1+(y/x)^2} = \frac{1/x}{1+(y/x)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

となる。

質疑応答で出た質問とその答えです。

- 偏微分の図形的なイメージというのはありますか??
  $\longrightarrow$ x だけを動かしたグラフ(y を固定した断面) $x \mapsto f(x,y)$ を(x で)微分したものが f_x です。
- 極座標のやつで、近づけ方が 2 通りあったら極限なしですか?
  $\longrightarrow$ はい。2 通りの近づけ方で極限値が異なるときは、極限なしです。
- 多変数関数の極限を具体的に計算するときには、極座標を使うのが定石ですか?
  $\longrightarrow$ 極限が存在することを示す時は、定石と言ってよいです。極限が存在しないことを示すときは、とにかく 2 つ例を作れば良いので、極座標にこだわる必要はありません。
- p135がよくわかりません
  $\longrightarrow$ 例を追加しました。境界(端の点)が一つでも A に入っていると、A は開集合になりません。
- 閉球や開球で n=2のときに円盤とありましたが、n=3が球状なのですか?また、n=4 のときはどうなりますか
  $\longrightarrow$ $n=3$ だと、$B_r(0)=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3; \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}<r\}$ なので、これは球(球の内部)です。$n=4$ だと 4 次元球と呼ぶべきものになります。

続きます。

質疑応答で出た質問とその答えです。

- $y = mx$ に沿った極限と、極座標の極限の違いはなんですか?
  $\longrightarrow$ 極座標を使っても、θ を固定しなければ(r に応じて変化することも考えれば)、直線的な近づき方とは限りません。$y = mx$ に沿ったものだと、(方向はいろいろですが、)直線的な近づけ方のみです。
- 例題 8.19 で $f(t, t^2)$ というようにおくのは許されるんですか?? x と y を結ぶつける関係ってなくないですか?それに二分の一ってなにを意味しているんですか??
  $\longrightarrow$ ありとあらゆる近づき方で $(x, y) \to (0, 0)$ を考えるので、自分で好きな近づけ方を考えてかまいません。この問題だと、$y = x^2$ に沿って $(0, 0)$ に近づけると、$f(x, y)$ が $1/2$ に近づくというだけです。Mathematica で描いたグラフも追加したので、参考にして下さい。
- 143 例 8.18 で反例がないとわかるのは θ を固定せずに極限が出るからということですか?
  $\longrightarrow$ はい。
- 絶対値とノルムの違いは次元の違いでしょうか?
  $\longrightarrow$ はい。用語の違いというか、絶対値の概念を一般化したものがノルムというか。

続きます。

質疑応答で出た質問とその答えです。

- p125 の講義積分の収束のところで、条件 (i)(ii) がなりたつとき講義積分は収束するといってよいのですか?振動する場合は考えなくていいのでしょうか?
  $\longrightarrow$ 結論から言えば、大丈夫です。説明は次のページに追加しました。
- 近づけかたによって極限が変わってきてしまうのは何が原因なんですか?
  $\longrightarrow$ 例 8.19 の $f(x, y)$ が $(0, 0)$ で連続でない(正確には、$f(0, 0)$ の値を何にしても連続にすることが出来ない)ということです。グラフも参照して下さい。
- 153 で $y > 0$ が定義されているのは何故ですか? $y < 0$ で不便性は生じますか
  $\longrightarrow$ 私が思考停止して第一象限だけ考えた結果ですね。条件を $x > 0$ だけにしても大丈夫です。

きちんと定理を説明・証明しようとすると概念が不足しているので、雰囲気だけ説明します。

$f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ が連続とする。$t > 0$ に対して

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^t f(x)\,dx + \int_t^\infty f(x)\,dx$$

であるから、広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ が存在するということは、

$$\int_t^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx - \int_0^t f(x)\,dx \to 0 \text{ as } t \to \infty$$

と言い換えが出来る。
さて、定理の仮定を満たしているとき、$|f(x)| \le g(x)$ かつ $g(x)$ が広義積分可能だから、

$$\left|\int_t^\infty f(x)\,dx\right| \le \int_t^\infty |f(x)|\,dx \le \int_t^\infty g(x)\,dx \to 0 \text{ as } t \to \infty.$$

はさみうちの原理より、$\displaystyle\int_t^\infty f(x)\,dx \to 0$ as $t \to \infty$ が従い、これは f が広義積分可能であることの言い換えであった。 □