微分積分学第一・演習 F クラス(34~40 ユニット)講義

第 3 回(5/12 :火 10:45–12:25)

担当:柴田 将敬(理学院数学系)

本日のテーマ

- 積分の計算法
- 広義積分

第 6 節 積分の計算法

目標

有理関数の積分など、具体的な計算法が良く知られているものを学ぶ。

この講義では、原始関数・不定積分を表すとき、積分定数は略す。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x.$$

$\arcsin x$ の導関数を知っていれば、上式が成立することは明らか。
しかし、次のように計算することも出来る。

$-1 < x < 1$ として、$\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ を計算する。

$t = \sin y$ $(y = \arcsin t)$ とおくと、$dt = \cos y\,dy$, $\begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & x \\ \hline y & 0 & \to & \arcsin x \end{array}$ となる。

従って、

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\arcsin x} \frac{\cos y}{|\cos y|}\,dy = \int_0^{\arcsin x} dy = \arcsin x$$

を得る。
ここで、仮定より $\arcsin x \in (-\pi/2, \pi/2)$ なので、$\cos y > 0$ となることを用いた。

(あたりまえであるが)同じ考え方で次の計算が出来る。

	x の範囲	置換
$\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x$	$(-1,1)$	$t=\sin y\ (y=\arcsin t)$
$\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$	$(-\infty,\infty)$	$t=\tan y\ (y=\arctan t)$
$\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \operatorname{arsinh} x = \log(x+\sqrt{x^2+1})$	$(-\infty,\infty)$	$t=\sinh y\ (y=\operatorname{arsinh} t)$
$\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \operatorname{arcosh} x = \log(x+\sqrt{x^2-1})$	$(1,\infty)$	$t=\cosh y\ (y=\operatorname{arcosh} t)$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| \ (x \neq 0) \text{ は正しいか?}$$

次は正しい。

事実

- $(0, \infty)$ 上で、$1/x$ の原始関数と不定積分は一致し、それは $\log x = \log|x|$ である。
- $(-\infty, 0)$ 上で、$1/x$ の原始関数と不定積分は一致し、それは $\log(-x) = \log|x|$ である。

だから、このように解釈すれば良い。しかし、次のことに気をつけなければならない。

$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ で不定積分が定義されているわけではない。

例えば、積分の定義を考えると、関数が有界でないので、$\int_{-1}^{x} 1/t \, dt$ は $x > 0$ では定義されていない。

$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x|\ (x \neq 0)$ は正しいか?

次のような疑問を持つ人もいるかもしれない。

$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 上では $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$ だから、$\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x} = \log|b| - \log|a|\ (a, b \neq 0)$ とすれば良いのではないか?

つまり、a から b の定積分を原始関数の差 $\log b - \log a$ として定義すれば良いのではないか?
$a, b > 0$ または $a, b < 0$ ならばもちろん正しい。
しかし、$c \in \mathbb{R}$ に対して $F(x) = \begin{cases} c + \log|x| & \text{if } x > 0, \\ \log|x| & \text{if } x < 0 \end{cases}$ とすると、
$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 上で $F'(x) = 1/x$. つまり、この $F(x)$ も、$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ では $1/x$ の原始関数と呼ぶべきものになっている。
だからといって $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx = F(1) - F(-1) = c$ では積分値が定まらない。

結論

定義域が区間でない場合は要注意。

I が区間でなければ、不定積分は定義できない。さらに、f の原始関数(I 上で $F' = f$ となるもの)を考えても、2 つの原始関数 F, G を考えたとき、$F - G$ がある定数となるとは限らないので、原始関数の差として定積分を定義しようとしても上手くいかない。

部分積分などで、漸化式を作って積分が計算できることもある。(教科書 p.77 など)

例 6.1

$n \in \mathbb{N}$ とし、$\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ を計算する。

$I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ とおく。部分積分すると、

$$I_n = \int \frac{(x)'\,dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+1-1\,dx}{(1+x^2)^{n+1}}$$
$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(I_n - I_{n+1})$$

となる。従って、漸化式

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{x}{2n(1+x^2)^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

を得る。$I_1 = \arctan x$ だから、I_2, I_3 と順に求めることが出来る。

$n \in \mathbb{N}$ とする。

自習課題

$I_n = \int \sin^n x\, dx$ に対して $I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \, \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}\ (n \geq 2)$ を示せ。

自習課題

$I_n = \int \cos^n x\, dx$ に対して $I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \, \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}\ (n \geq 2)$ を示せ。

自習課題

$I_n = \int \tan^n x\, dx$ に対して $I_n = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2}\ (n \geq 2)$ を示せ。

自習課題

$x \in (0, \infty)$ とする。
$I_n = \int (\log x)^n\, dx$ に対して $I_n = x(\log x)^n - nI_{n-1}$ を示せ。

$f(x)$, $g(x)$ を x の多項式として、有理関数の積分

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$$

を考える。これは、($g(x)$ の因数分解を使えば)不定積分が具体的に計算できることが知られているので、それを紹介する。

まず、

部分分数分解

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \text{多項式} + \frac{a}{(x+b)^m}\text{の形の項の和} + \frac{Cx+D}{(x^2+Ax+B)^n}\text{の形の項の和}$$

と変形できる(部分分数分解については、後でもう少し詳しく述べる)。
ここで $a, b, A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$ は定数で、$x^2 + Ax + B = 0$ は実数の根を持たない。
つまり、判別式 $A^2 - 4B < 0$ である。

有理関数の積分は、部分分数分解によって、

多項式、$\dfrac{b}{(x+a)^m}$, $\dfrac{Cx+D}{(x^2+Ax+B)^n}$ (ただし $A^2-4B<0$)

の積分に帰着されることがわかった。($m,n \in \mathbb{N}$, $a,b,A,B,C,D \in \mathbb{R}$.)

$$\int \frac{1}{(x+a)^m}\,dx = \begin{cases} \log|x+a| & \text{if } m=1, \\ \dfrac{1}{(1-m)(x+a)^{m-1}} & \text{if } m \geq 2, \end{cases}$$

であるから、あとは $\displaystyle\int \frac{Cx+D}{(x^2+Ax+B)^n}\,dx$ が計算できれば良い。

そして、

$$\frac{Cx+D}{(x^2+Ax+B)^n} = \frac{C}{2}\frac{2x+A}{(x^2+Ax+B)^n} + \frac{D-AC/2}{(x^2+Ax+B)^n}$$

となっていて、

$$\int \frac{2x+A}{(x^2+Ax+B)^n}\,dx = \int \frac{(x^2+Ax+B)'}{(x^2+Ax+B)^n}\,dx$$
$$= \begin{cases} \log(x^2+Ax+B) & \text{if } n=1, \\ \dfrac{1}{(1-n)(x^2+Ax+B)^{n-1}} & \text{if } n \geq 2, \end{cases}$$

となるので、あとは $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+Ax+B)^n}\,dx$ が計算できれば良いことがわかる。

$$\int \frac{1}{(x^2+Ax+B)^n}\,dx$$ を計算したい。

平方完成すると、

$$x^2+Ax+B=\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(B-\frac{A^2}{4}\right)=\left(B-\frac{A^2}{4}\right)\left(\left(\frac{x+A/2}{\sqrt{B-A^2/4}}\right)^2+1\right)$$

である。考えているのは(実数の範囲では)因数分解できない 2 次式、つまり、$A^2-4B<0$ であったことに注意して、$E:=\sqrt{B-A^2/4}$, $t=(x+A/2)/E$ とおくと、

$$\int \frac{1}{(x^2+Ax+B)^n}\,dx=\int \frac{1}{E^{2n-1}(t^2+1)^n}\,dt$$

となる。結局、$\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt$ が計算できればよく、これは、漸化式を使えば計算できるのであった。

以上より、有理関数は、部分分数分解すれば、(非常に面倒かもしれないが)計算できることがわかる。

例: $$\frac{x^8+3x^7+17x^6+30x^5+30x^4+42x^3-4x^2-19x-20}{x^7+x^6+x^5+x^4-x^3-x^2-x-1}$$
$$= x+2+\frac{3}{x+1}+\frac{4}{(x+1)^2}+\frac{5}{x-1}+\frac{6x+7}{x^2+1}+\frac{8x+9}{(x^2+1)^2}.$$

左辺のような有理関数が与えられたときに、右辺のように変形することを部分分数分解(部分分数展開)という。左辺の積分を計算するときに、右辺のように分解すれば、積分が計算できる。

より一般に、有理関数(多項式を多項式で割ったもの)は、多項式や、$b/(x+a)^m$, $(Cx+D)/(x^2+Ax+B)^n$ の形の項の和で表すことができる。例を題材に部分分数分解のやり方を見ておく。

部分分数分解: Partial fraction decomposition

Step 1

まず、分子 $f(x)$ を分母 $g(x)$ で割った商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とすると、

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)}$$

を得る。ここで、「$R(x)$ の次数」$<$「$g(x)$ の次数」となる。例だと、

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (x+2) + \frac{14x^6 + 27x^5 + 29x^4 + 45x^3 - x^2 - 16x - 18}{x^7 + x^6 + x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - x - 1}$$

となる。

$\boxed{\text{Step 2}}$

分母を(複素数を使わずに)因数分解する。

$$g(x) = (x+1)^2(x-1)\left(x^2+1\right)^2$$

(実係数の)多項式は、$\mathbf{1}$ 次式と、(判別式が負となる) $\mathbf{2}$ 次式の積で表される。(代数学の基本定理)

補足 6.2

代数学の基本定理を証明することはそれなりに大変。しかも、因数分解できるといっても、根号などを用いて具体的に表示されるとは限らない。

Step 3 方程式を立てる。

$g(x)$ が $(x+a)^m$ という因数を持つなら、

$$\frac{(m-1)\text{ 次式}}{(x+a)^m} = \frac{b_1}{x+a} + \frac{b_2}{(x+a)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(x+a)^m}$$

という式が右辺に出てくる可能性がある。また、$g(x)$ が $(x^2+Ax+B)^n$ という因数を持つなら、

$$\frac{(2n-1)\text{ 次式}}{(x^2+Ax+B)^n} = \frac{C_1x+D_1}{(x^2+Ax+B)} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+Ax+B)^2} + \cdots + \frac{C_nx+D_n}{(x^2+Ax+B)^n}$$

という式が右辺に出てくる可能性がある。上記の b_i や C_i, D_i を未知数として方程式を立てればよい。

例だと、

$$\frac{14x^6+27x^5+29x^4+45x^3-x^2-16x-18}{(x+1)^2(x-1)\left(x^2+1\right)^2}$$
$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{\left(x^2+1\right)^2}$$

となり、$A, B, \ldots, G$ が未知数となる。

Step 4 (最後) 方程式を解く。

$$\frac{14x^6+27x^5+29x^4+45x^3-x^2-16x-18}{(x+1)^2(x-1)\left(x^2+1\right)^2}$$
$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+1}+\frac{Fx+G}{\left(x^2+1\right)^2}$$

分母を両辺に掛けると、

$$14x^6+27x^5+29x^4+45x^3-x^2-16x-18$$
$$=A(x+1)(x-1)(x^2+1)^2+B(x-1)(x^2+1)^2+C(x+1)^2(x^2+1)^2$$
$$+(Dx+E)(x+1)^2(x-1)(x^2+1)+(Fx+G)(x+1)^2(x-1)$$

6 次式で未知数が **7** 個だから、方程式が解けそうな気がする。(実際解ける。)あとはがんばるのみ。展開して係数比較して連立方程式を解けば良いが、もう少しだけ工夫すると良い。

$$14x^6 + 27x^5 + 29x^4 + 45x^3 - x^2 - 16x - 18$$
$$= A(x+1)(x-1)(x^2+1)^2 + B(x-1)(x^2+1)^2$$
$$+C(x+1)^2(x^2+1)^2$$
$$+(Dx+E)(x+1)^2(x-1)(x^2+1) + (Fx+G)(x+1)^2(x-1)$$

この式は任意の x について成立している(はず)なので、x に具体的な値を入れて良い。例えば、$x = 1$ とすると、

$$14 + 27 + 29 + 45 - 1 - 16 - 18 = 16C$$

となり、$C = 5$ がわかる。同様に、$x = -1$ を代入すると、$B = 4$ もわかる。C と B がわかったので、これらを用いて整理すると、

$$9x^6 + 13x^5 + 18x^4 + 17x^3 - 8x^2 - 30x - 19$$
$$= A(x+1)(x-1)(x^2+1)^2$$
$$+(Dx+E)(x+1)^2(x-1)(x^2+1) + (Fx+G)(x+1)^2(x-1)$$

となる。右辺を見ると、$(x-1)(x+1)$ を因数に持つことがわかるので、両辺を $(x-1)(x+1)$ で割ってみる。

$$9x^4+13x^3+27x^2+30x+19$$
$$=A(x^2+1)^2+(Dx+E)(x+1)(x^2+1)+(Fx+G)(x+1)$$

を得る。$x=-1$ を代入すると $A=3$ がわかり、これを整理すると、

$$6x^4+13x^3+21x^2+30x+16$$
$$=(Dx+E)(x+1)(x^2+1)+(Fx+G)(x+1)$$

がわかり、$(x+1)$ で割ると、

$$6x^3+7x^2+14x+16=(Dx+E)(x^2+1)+(Fx+G)$$

を得る。このぐらい簡単になれば、展開して係数比較しても良いし、最高次の係数を見れば $D=6$ が分かって整理して、などとやっても良い。
また、左辺を x^2+1 で割ると商が $Dx+E$ で余りが $Fx+G$ となることから、割り算を計算しても良い。
結局 $D=6,\ E=7,\ F=8,\ G=9$ を得る。□

まとめ

部分分数分解の係数を決めるためには、

- 分母を払って、多項式の恒等式として両辺を比較すると良い。
- さらに、全て展開して係数を比較し、得られた連立方程式を解けば、展開が決定できる。ただし、計算は面倒かもしれない。
- 具体的な値を代入してみる、最高次の係数を比較する、など、工夫して計算すると良い。

$R(X,Y)$ は X,Y を変数とする有理関数(X,Y の多項式を X,Y の多項式で割ったもの)とする。同様に $R(X,Y,Z)$ なども考える。

$a \in \mathbb{R}$ を定数とし、$\int R(x, \sqrt{x+a})\,dx$ といった形の積分を考える。

$t = \sqrt{x+a}$ $(x = t^2 - a)$ とおくと、
$\displaystyle\int R(x, \sqrt{x+a})\,dx = \int R(t^2-a, t)2t\,dt$ となる。

つまり、有理関数の積分に帰着される。

例(追加)

$R(X,Y) = \dfrac{XY+3}{X^2+1+Y}$ の場合を考えると、$\displaystyle\int \frac{x\sqrt{x+a}+3}{x^2+1+\sqrt{x+a}}\,dx = \int R(x,\sqrt{x+a})\,dx =$
$\displaystyle\int R(t^2-a,t)2t\,dt = \int \frac{(t^2-a)t+3}{(t^2-a)^2+1+t} \times 2t\,dt$ となる。
右辺は t の有理関数の積分。

自習課題

$a \in \mathbb{R}$, $x \in (a, \infty)$ とする。
$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+a}}\,dx = \frac{2}{3}(x-2a)\sqrt{x+a}$ を示せ。

発展的話題

より一般的に、n 乗根が出てくるような場合で、置換で有理関数に帰着される例が知られている。例えば、教科書 p. 81 を参照。

$t = \tan x$ とおくと、$\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

となる。従って、

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x)\, dx = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, t\right) \frac{dt}{1+t^2}$$

となって、$\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\tan x$ が出てくる積分は、有理関数の積分に帰着できる。

例 6.3

$a, b > 0$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ とする。

$$\int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}} \tan x\right).$$

$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと、

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

となる。従って、

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

となって、$\sin x$, $\cos x$ が出てくる積分は、有理関数の積分に帰着できる。

例 6.4

$x \in (-\pi/2, \pi/2)$ とする。このとき、$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left(\tan\frac{x}{2}\right)$ となる。

補足 6.5

先ほどの $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\tan x$ が出てくる場合であっても、上記の方法は使える。
ただ、$t = \tan x$ で計算できるなら、たいてい、その方が簡単になる。

実際、$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくのは、$s = x/2$, $t = \tan s$ と二段階の置換をしていることになるが、
$s = x/2$ とおくことで、

$$\sin x = \sin 2s = 2\sin s\ \cos s = 2\tan s\ \cos^2 s,\ \cos x = \cos 2s = \cos^2 s - \sin^2 s,$$
$$dx = 2\,ds$$

とすることで、$\sin^2 s$, $\cos^2 s$, $\tan s$ が出てくる積分に帰着してから $t = \tan s$ で置換しているのである。
初めから $t = \tan x$ と置換できるならその方が簡単。

第 7 節 広義積分

目標

非有界区間での積分や非有界関数の積分を学ぶ。

定積分を定義するとき、関数を棒グラフで近似する都合上、関数は有界を仮定していた。また、区間も有界閉区間で考えていた。しかし、非有界な区間での定積分や非有界な関数の定積分も便利に使いたい。そのために、広義積分を導入する。

定義 7.1 (広義積分)

$-\infty < a < b < \infty$ とし、$f : [a, b) \to \mathbb{R}$ は連続関数とする。

極限 $\boxed{\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx}$ が存在するとき、この極限値をやはり $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表す。この積分は広義積分と呼ばれる。また、この極限が存在するとき、f は $[a, b)$ で広義積分可能とか広義積分が存在するという。

$f : (a, b] \to \mathbb{R}$ を連続関数とするときも、同様に
$\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx}$ と定める。

広義積分: improper integral

補足 7.2

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が連続関数であれば、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

となっている。つまり、広義積分は通常の定積分と一致する。つまり、広義積分は通常の積分の拡張になっている。

補足 7.3

ここでは、f は連続関数であることを仮定しているが、f が積分可能であれば、同様に定義できる。詳しくは教科書第 4 章 §3 (p.113) を参照。

より一般の集合での広義積分を考えるときは、片側開区間 $(a, b]$, $[a, b)$ の和に分解して定義する。

定義 7.4

$-\infty < a < b < \infty$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ が連続であるとする。

このときは、$c \in (a, b)$ を一つ選んで、次のように定める。

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{a+\epsilon}^c f(x)\,dx + \lim_{\epsilon \to 0+} \int_c^{b-\epsilon} f(x)\,dx.}$$

補足 7.5

- f の原始関数を F とすると、$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0+} F(a+\epsilon) + \lim_{\epsilon \to 0+} F(b-\epsilon) \text{ である。}}$
  つまり、$c \in (a, b)$ の選び方は積分値に影響を与えない。
- $\boxed{\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{a+\epsilon}^c f(x)\,dx + \lim_{\epsilon \to 0+} \int_c^{b-\epsilon} f(x)\,dx}$ と $\boxed{\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(x)\,dx}$ は意味が違う。

定義 7.6

$-\infty < a < c < b < \infty$, $f : [a, c) \cup (c, b] \to \mathbb{R}$ が連続であるとする。

このときは、

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{c+\epsilon}^{b} f(x)\,dx}$$

とする。

補足 7.7

$\boxed{\lim_{\epsilon\to 0+}\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{c+\epsilon}^{b} f(x)\,dx}$ と $\boxed{\lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)\,dx\right)}$

は意味が違う。

例(追加)

$\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{dx}{x} + \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\epsilon}^{1}\frac{dx}{x} = \infty - \infty =?$ だが、$\lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{dx}{x} + \int_{\epsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right) = \lim_{\epsilon\to 0+} = 0.$

定義 7.8 (非有界区間での広義積分)

$a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ は連続関数とする。

次のように広義積分を定める。

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx.$$

$f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ に対しても同様。

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx := \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx.$$

例 7.9

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$$

$0 < \epsilon < 1$ として計算すると、

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_\epsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\epsilon} \to 2 \ (\epsilon \to 0+)$$

となる。従って、広義積分は 2 である。

例 7.10

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

広義積分の定義に従って、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2}$$

となるが、極限をまとめて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_{a}^{b} \frac{dx}{1+x^2}$$

と表すこともできる。(補足 2.5 も参照。)
計算すれば、

$$\int_{a}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_{a}^{b} = \arctan b - \arctan a \to \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \ (a \to -\infty, b \to \infty)$$

となる。

質疑応答で出た質問とその答えです。

- 極限が収束しない場合、広義積分は定義されますか?
  $\longrightarrow$ 定義されません。極限が収束するときだけ、それを広義積分といいます。
  ただ、広義積分と(積分の)極限はほぼ同じ意味で使います。なので、「広義積分が収束する」とか「広義積分が発散する」いいます。また、極限が ∞ や $-\infty$ のときは、広義積分が ∞ に発散するとか $-\infty$ に発散するとかいいます。
- テストやレポートでも積分定数を省略してもいいのですか?
  $\longrightarrow$ 私が担当するテスト・レポートでは省略してかまいません。
- 部分分数分解について質問があります。講義で扱った例題の step4 において、虚数単位を代入することはできますか
  $\longrightarrow$ できます。多項式の恒等式として係数比較をすれば良いので、複素数の多項式とみなしてもかまいません。
  (なぜそのようにして良いのか?というと、実係数の多項式 $f(x)$, $g(x)$ があって、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = g(x)$ なら、係数は全て一致。そして、$x \in \mathbb{C}$ としても $f(x) = g(x)$ が成り立つ。という事実に基づきます。)

質疑応答で出た質問とその答えです。

- 最初のえっくすぶんのいちの計算結果がcになるところをところをもう一回いってもらってもいいですか?
  $\longrightarrow$ p.93, p.94 に説明を加えました。
- $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ はどういう計算式になりますか?
  $\longrightarrow$ p.109 に例を書き加えました。
- 補足 7.5、7.7 にある式の意味の違いをもう一度説明していただきたいです。
  $\longrightarrow$ p.118 に例を書き加えました。