微分積分学第一・演習 F クラス(34~40 ユニット)講義

第 2 回(5/7 :木 8:50–10:30)

担当:柴田 将敬(理学院数学系)

本日のテーマ

- 微分
- 積分

n 乗根 $\sqrt[n]{x}$

$n \in \mathbb{N}$ とする。

$[0, \infty)$ 上の実数値関数 $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ は、
$f(x) = x^n$ $(x \geq 0)$ の逆関数として定義される関数である。

第 4 節 微分

目標

微分に関する基本的な事柄をまとめておく。

微分法の第一の目的は

グラフ $y = f(x)$ に接線を引く

ことである。そのために、微分係数を求めるわけであるが、その計算法が微分法である。
そして、そこで用いられる技術には、次のような応用がある。

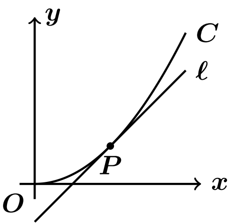
- グラフ $y = f(x)$ の形を調べる(増減表など)
- $f(x)$ の近似を求める
- 面積の計算(微積分学の基本定理が重要)
- 微分方程式

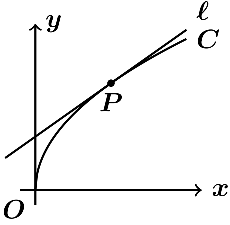
接線とは何か?きちんと定義しようとすると実は面倒である。

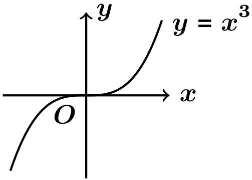
接線の素朴な定義

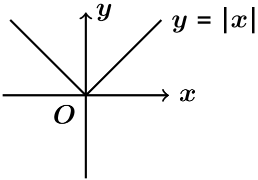
開区間 I で定義された関数 $y = f(x)$ のグラフを C とする。一次関数 $y = ax + b$ のグラフ ℓ (直線)が次をみたすとき、ℓ を C の $x = a$ における接線という。

- C と ℓ の共通部分は一点 $P = (a, f(a))$ のみ。
- ($x = a$ の近くでは) C は ℓ の上(or 下)側にある。









これだと、$y = x^3$ の原点における接線が存在しないことになる。また、$y = |x|$ の原点における接線が多数存在する。ではどうするか?それは後で述べる。

定義 4.1 (微分)

I を開区間、$x \in I$ とする。I 上で定義された関数 $f = f(x)$ が $x \in I$ で微分可能であるとは、次の極限が存在することである。

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

この極限値を f の x における微分係数と呼び、

$$\frac{df}{dx}(x), \quad f'(x)$$

などと表す。

補足 4.2

定義から明らかであるが、f が x で微分可能となるためには、f が x で連続でなければならない。

微分可能: differentiable, 微分係数: derivative, differential coefficient

I を $\mathbb{R}$ の開区間、$a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$, f は a で微分可能とする。このとき、

$$R(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{if } x \neq a, \\ 0 & \text{if } x = a \end{cases}$$

とおくと、

$$f(x) = \underline{f(a) + f'(a)(x-a)} + R(x)(x-a), \quad \lim_{x\to a} R(x) = 0$$

となる。これは、

$$f(x) - \left(\underline{f(a) + f'(a)(x-a)}\right) = R(x)(x-a)$$

で、x が a に近い時、右辺は $|x-a|$ と比べてもさらに小さいことを意味している。下線部を f の a における<u>一次近似</u>と呼ぶ。

自習課題

上記の $f(x)$ に対して、$f(x) = \alpha(x-a) + \beta + (x-a)\tilde{R}(x)$, $\lim_{x\to a} \tilde{R}(x) = 0$ が成り立つ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ と関数 $\tilde{R}$ があるとする。

このとき $\alpha = f'(a)$ かつ $\beta = f(a)$ となることを示せ。

前ページの自習課題より、ある意味、x が a に近いときは、$f(x)$ を近似する一次関数でベストなものが、$f(a)+f'(a)(x-a)$ となっている。
この意味で、$y=f(x)$ の $x=a$ における接線は、$y=f'(a)(x-a)+f(a)$ がふさわしい。

定義 4.3 (接線)

I を $\mathbb{R}$ の開区間、$a\in I$, $f:I\to\mathbb{R}$, f は a で微分可能とする。

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

で定まる直線を、$y=f(x)$ の $x=a$ における<u>接線</u>という。

結局、接線を求めることは、微分係数を求めることに帰着された。

接線: tangent line, tangent

定義 4.4 (導関数)

I を開区間、$f : I \to \mathbb{R}$, f は任意の $x \in I$ で微分可能とする。

このとき、$x \mapsto f'(x)$ として定まる関数 $f' : I \to \mathbb{R}$ を f の<u>導関数</u>という。

また、f から f の導関数を求めることを、f を微分する、という。

定理 4.5

I: $\mathbb{R}$ の開区間、$f, g : I \to \mathbb{R}$ は I 上で微分可能、$c \in \mathbb{R}$ とする。

このとき、cf, $f \pm g$, fg, f/g は I 上で微分可能で、

$$\boxed{(cf)' = cf', \quad (f \pm g)' = f' \pm g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

が成り立つ。ただし f/g については、$g \neq 0$ とする。

導関数: derivative

定理 4.6 (合成関数の微分)

I, J は開区間、g は I 上の関数で x_0 で微分可能、f は J 上の関数で、$y_0 = g(x_0) \in J$ で微分可能とする。このとき、合成関数 $f(g(x))$ は x_0 で微分可能で、

$$\Big(f(g(x))\Big)'\Big|_{x=x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

となる。

補足 4.7

- つまり、上の設定で、g は I 上で微分可能、f は J 上で微分可能、g の値域 $g(I)$ は $g(I) \subset J$ を満たす(合成関数が定義できる)なら、

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x))g'(x) \quad (x \in I).$$

- 定理の主張からわかるように、微分(導関数を求めること)と代入は順序が交換出来ない。合成関数や変数変換を使うときは、それらの順序が明確になるように記号を使わないと、混乱の元になる。

合成関数の微分の公式からわかるように、微分するという操作と代入するという操作は入れ替えられない。なので、そこが明確になるように記述しないと、混乱を招く。よく使われる使い方をまとめておく。

I を $\mathbb{R}$ の開区間、$f : I \to \mathbb{R}$ は微分可能とする。変数は x とする。

$\frac{df}{dx}$, f' は f の導関数(変数 x を略したもの)を表す。

$\frac{df}{dx}(a)$, $f'(a)$ は f の導関数の $x = a$ での値を表す。言い換えれば、導関数(変数は x)に $x = a$ を代入したものを表す。
これは $x = a$ における微分係数に他ならない。

$\frac{d}{dx}$ や $(\quad)'$ は、微分するという操作を表す。従って、$\frac{d}{dx}(\star) = (\star)'$ は $\star$ を x で微分した関数を表す。

$\Big|_{x=a}$ は(x の関数に) $x = a$ を代入するという操作を表す。従って、$(\star)\Big|_{x=a}$ は、$\star$ に $x = a$ を代入したものを表す。
例えば、$f(x)\Big|_{x=a} = f(a)$ となる。

特に、代入・合成関数が出てくるような計算では、各自気を付けて記述すること。

定理 4.8 (逆関数の導関数)

I :開区間、$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ は単調増加(or 単調減少)で微分可能な関数、$f'(x) \neq 0$ $(\forall x \in I)$ とする。

このとき、逆関数 $x = f^{-1}(y)$ は $J = f(I)$ で微分可能で、
$\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ が成立する。

逆関数が微分可能であることを示すのは面倒。
$y \in J$ に対して $x = f^{-1}(y)$ とおくと $f(x) = y$, $x = f^{-1}(f(x))$ である。これを x で微分すると、合成関数の微分法より、

$$\frac{d}{dx}x = 1 = \frac{d}{dx}\left(f^{-1}(f(x))\right) = \left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)$$

が従う。これを見れば、$f'(x) \neq 0$ が必要になることも推測できる。

逆関数の微分の公式を使えば(合成関数の微分の公式を使っても同じことだが)、次のように逆関数の導関数が求まる。

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1,1)), \qquad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1,1)),$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad (\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x \in (1,\infty)),$$
$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad (x \in (-1,1))$$

自習課題

上の式を確かめよ。

補足 4.9

$$\operatorname{arsinh} x = \log(x+\sqrt{x^2+1}), \ \operatorname{arcosh} x = \log(x+\sqrt{x^2+1}), \ \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

であった。

定義 4.10 (原始関数)

開区間 I 上で定義された関数 f, F に対して、I 上で $F'(x) = f(x)$ が成り立つとき、F を f の<u>原始関数</u>と呼ぶ。

補足 4.11

実は、開区間 I 上で定義された関数 f, F, G に対して、I 上で $F'(x) = G'(x) = f(x)$ が成り立つとき、$F - G$ は I 上で定数関数となることが示せる。

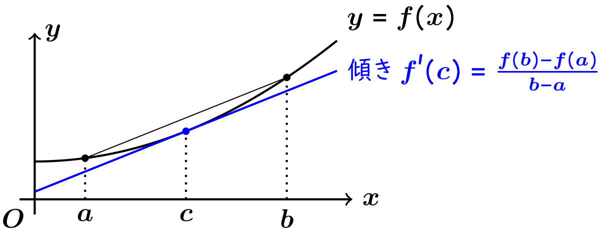
このことから、二つの原始関数があっても、それは定数の差を除いて一致することがわかる。

原始関数: primitive function, antiderivative

定理 4.12 (平均値の定理(教科書 p.44 定理 3))

f は有界閉区間 $[a,b]$ で連続、(a,b) で微分可能とする。

このとき $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ 満たす $c \in (a,b)$ が存在する。



補足 4.13

上記の c は f だけでなく、a や b にも依存して定まる。従って、a や b を動かすような状況だと、c は a や b に応じて変化してしまう。

このことを忘れると、しばしば間違いを引き起こすので注意。間違いを回避するため、$c = c(a,b)$ のように表して、c が a と b に依存することを強調することがある。

第 5 節 積分

目標

積分に関する基本的な事柄をまとめておく。

積分法の第一の目的は

面積を求める

ことである。

そして、高校では、原始関数を用いて定積分が定義された。原始関数が具体的に求まるなら、その定義でも良い気がする。しかしながら、この定義の仕方だと、例えば、

与えられた関数(例えば $f(x)=e^{-x^2}$)の原始関数は本当にあるのか?

といった問には答えられない。

土地の「広さ」を客観的な数量として表すことは、昔々からの課題であった。

昔の解決策

毎年とれる作物の量で土地の広さを表せば良い。

年によって、また耕作する人によっても、作物の量が変わるので、もう少しきちっとしたい。というわけで、「面積」の概念が整備された。

面積(素朴な定義)

面積とは次の性質を満たすものである。以下、A, B は $\mathbb{R}^2$ の(有界な)部分集合とする。

- A の面積 $|A|$ は 0 以上の実数。合同なものの面積は同じ。
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- $A \subset B$ なら $|A| \leq |B|$.
- A が直線や曲線や点なら $|A| = 0$.
- 長方形 $[a, b] \times [c, d]$ の面積は $(b - a)(d - c)$.

ここでは上記の性質を全て満たすものがあるかどうかは問わない。
三角形に分割すれば、多角形の面積は求まる。

円の面積(アルキメデス、紀元前 3 世紀)

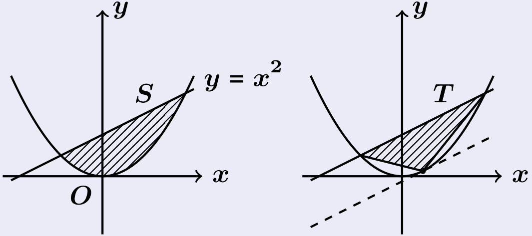
半径 1 の円の面積は π となる。これは、

円の内接多角形の面積 $\leq$ 円の面積 $\leq$ 外接多角形の面積

を用いて示された。近似値も計算された。

なお、半径 1 の円の円周の長さが 2π (直径 1 の円の円周の長さが π)というのが π の定義。

放物線の面積(アルキメデス、紀元前 3 世紀)



上図の斜線部分の面積を S, T とすると、$S = \frac{4}{3}T$ が成り立つ。

これは, S の内部を三角形で分割し、$S = T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4^2}T + \cdots + \frac{1}{4^n}T + \cdots$

となることを用いた。

何にせよ、曲線で囲まれた部分の面積を求めると、極限の概念があらわれる。そして、計算はとても面倒。

面積を求めるために、面積の定義をはっきりさせたい。それが定積分の定義となる。都合により、ここでは詳しい定義には立ち入らない。

定義 5.1 (定積分の定義(?))

$-\infty < a < b < \infty$, f は $I = [a, b]$ 上で定義された有界な関数とする。

高校で学んだ区分求積法のように、$y = f(x)$ を棒グラフで近似し、棒グラフの面積の極限として、f の I 上での<u>定積分</u>(直線 $x = a$, 直線 $x = b$, x 軸 $y = 0$ と f のグラフ $y = f(x)$ で囲まれた部分の符号付面積)を定め、それを $\int_a^b f(x)\,dx$ と表す。

f によっては、定積分は極限であるから、上手く定義できないことがあるが、定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が定まるとき、f は I 上で<u>積分可能</u>であるという。

$\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_c^c f(x)\,dx := 0$ (c は任意)とする。

定理 5.2 (定積分の存在)

連続関数は積分可能である。つまり、f が $[a, b]$ 上で連続ならば、定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が存在する。

定積分: definite integral, 積分可能: integrable

定積分の性質を列挙する。以下、$-\infty < a < b < \infty$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続関数とする。

区間加法性

$\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ に対して、$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx$ となる。

$[a, b]$ 上で $f(x) \leq g(x)$ なら、$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ となる。
特に、$\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ となる。

積分の線形性

$k \in \mathbb{R}$ に対して、
$\displaystyle\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$ (複合同順)、
$\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ となる。

実は、f, g が連続でなくても、定積分が可能であれば成立する。

定義 5.3 (不定積分)

I :区間, $f: I \to \mathbb{R}$ は I 上で積分可能, $c \in I$ とする。

このとき、$x \mapsto \displaystyle\int_c^x f(t)\,dt$ で定まる x の関数を、f の<u>不定積分</u>と呼ぶ。

$c, d \in I$ とし、二つの不定積分
$F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\,dt$, $G(x) = \displaystyle\int_d^x f(t)\,dt$ を考えると、
$F(x) - G(x) = \displaystyle\int_c^d f(t)\,dt$ となり、右辺は定数関数である。
より一般に、$\displaystyle\int_c^x f(t)\,dt + \text{定数}$ の形で表される関数も不定積分と呼び、$\displaystyle\int f(x)\,dx$ とも書く。

f の不定積分 F を用いると、定積分の性質(区間加法性)より、次が成立する。

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

不定積分: indefinite integral

定積分は極限を用いて定義されるので、具体的な関数 f に対して計算するのも容易ではない。

ここで、関数 f について、原始関数と不定積分を思い出しておく。

原始関数

$F'(x) = f(x)$ となる $F(x)$ のこと。

不定積分

$F(x) = \int_c^x f(x)\,dx$ で定まる $F(x)$ のこと。$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ となる。

個々の具体的な関数、例えば $f(x) = x^n$ とかの定積分は、以前から計算されていたが、不定積分と原始関数が一致する(微分積分学の基本定理)ことを見抜いて微分積分学として整備したのが、Newton や Libnitz である。

定理 5.4 (微分積分学の基本定理)

I を開区間、f を I 上の連続関数とする。

- $c \in I$ とする。このとき、不定積分 $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ は原始関数となる。
  つまり、$F'(x) = f(x)$ $(x \in I)$ が成立する。(特に、連続関数は原始関数を持つ)
- F を f の I 上での原始関数とする。
  $a, b \in I$ に対して、$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ が成立する。
- f は I 上で微分可能で f' は I 上で連続とする。$a, b \in I$ に対して、
  $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$ が成立する。

補足 5.5

このように、f を連続関数とすると、f の不定積分と原始関数は同じものになる。なので、区別をしないことが多い。

$(x^3)' = 3x^2$ となることから、$3x^2$ の原始関数は x^3 であることが分かる。このように、具体的な関数の微分をあらかじめ計算しておくことで、原始関数のリスト(例えば教科書 p.74)が作れる。

また、高校で学んだ置換積分や部分積分(次のページも参照)なども利用することで、具体的な関数の原始関数は、「発見的」に求めることが出来る。

しかし、初等関数(三角関数や指数関数や多項式の逆関数や四則演算や合成で表される関数)で、原始関数が初等関数でない例も多い。このような背景ともからんで、与えられた初等関数の原始関数を求める決まった手順というのはない(実はある程度手順があることが知られているが、それはとても高度で複雑)。

原始関数が初等関数でない例

$e^{x^2} = \exp(x^2)$, $\dfrac{\sin x}{x}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^4}}$, $\dfrac{1}{\log x}$ など。

補足 5.6

原始関数が初等関数で表せなくても、連続関数の原始関数は存在し、$\displaystyle\int e^{x^2}\,dx$ のように数式で表すことはできるし、その性質を調べることも出来る。
初等関数で表せれば、初等関数の既知の性質が使えてとても便利だから、まずは初等関数で表すことを目指すというわけである。

定理 5.7 (置換積分)

I, J を開区間、$f : I \to \mathbb{R}$ は連続、$\phi : J \to \mathbb{R}$ は可微分で ϕ' は連続とする。
さらに、$[a, b] \subset I$, $[\alpha, \beta] \subset J$, $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$, $\phi([\alpha, \beta]) \subset I$ とする。このとき、
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$ が成立する。

左辺から右辺を計算することもあれば、右辺から左辺を計算することもある。

定理 5.8 (部分積分)

I を開区間、$f, f', G, g = G' : I \to \mathbb{R}$ は連続とする。$a, b \in I$ に対して
$\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)G(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx$ が成立する。

よく出てくる関数の原始関数。x の範囲は代表的な開区間を用いた。

関数	原始関数	x の範囲	条件・補足
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$\mathbb{R}$	$a \neq -1$. $a < 0$ のときは、$x > 0$ とする。
$\frac{1}{x}$	$\log x$	$(0, \infty)$	
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$	
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$	$\mathbb{R}$	$a > 0$, $a \neq 1$.
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$	
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$	

逆関数の導関数の計算結果から、次もわかる。

関数	原始関数	x の範囲	条件・補足
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x,\ -\arccos x$	$(-1,1)$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x = \log(x+\sqrt{x^2+1})$	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh} x = \log(x+\sqrt{x^2-1})$	$(1,\infty)$	
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$	$(-1,1)$	

レポート提出期限の変更

- 本日のレポートの提出期限は、5/8 (金) 17:00 とします。
- 今後、講義のレポートの提出期限は、翌日 17:00 とするつもりです。

質疑応答で出た質問とその答えです。

- 原始関数と不定積分の区別がつく具体的な例はあるか
  $\longrightarrow f(x) := \begin{cases} -1 & \text{if } x \leq 0, \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$ とすると、$F(x) = |x|$ が不定積分になります。しかし、$F(x) = |x|$ は原点で微分可能ではないので、原始関数にはなっていません。
- スライドの 68 ページの下にある合成関数の微分の式ですが、これが 1 =から始まっているのはなぜですか？
  $\longrightarrow x = f^{-1}(f(x))$ を x で微分したときの左辺が $\frac{d}{dx}x = 1$ です。
- 前回の質問なんですけど、実数全体が閉区間かつ開区間とはどういうことですか
  $\longrightarrow$ 開集合や閉集合の自然な定義をすると、自動的に、開集合でも閉集合でもあるような集合が生まれてしまいます。実数全体と空集合がそういうものになります。
- →の左に縦棒がついたような記号の説明をもう一度お願いしたいです
  $\longrightarrow$ $\mapsto$ ですね。関数・写像に対して、元の対応を表す時にこの記号を使います。$x \mapsto \sqrt[n]{x}$ は、x が $\sqrt[n]{x}$ に対応するという意味です。
- ($f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ に対して) $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ だとだめですか？
  $\longrightarrow f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ でも良いです。