微分積分学第一・演習 F クラス(34~40 ユニット)講義

第 1 回(5/5 :火 10:45–12:25)

担当:柴田 将敬(理学院数学系)

本日のテーマ

- 授業の概要
- 写像と関数
- 初等関数
- 連続関数

第 0 節 授業の概要

担当者の自己紹介

- 氏名:柴田(しばた)将敬(まさたか)
- 所属: 東京工業大学 理学院 数学系 助教
- web サイト: http://www.math.titech.ac.jp/~shibata/
- メールアドレス: shibata[あっと]math.titech.ac.jp

よろしくお願いします。

概要

- 微分積分学を学ぶ授業で、講義(週 2 回)と演習(週 1 回)のセットです。
- 講義(柴田が担当)は火曜 3,4 限と木曜 1,2 限。
- 演習(長町先生が担当)は月曜 3,4 限。
- クラス(ここは F クラス)はユニット番号で決まっています。
- このクラスは教職認定クラスのため、教職免許希望者もクラス変更の必要はありません。
- 必修であり、時間割の関係で再履修しにくいので注意。
- 成績は、講義・演習で行われる小テスト・レポート・試験などの結果の総合です。
  しかしながら、今回はコロナ対応のため、教室での小テストや試験は行われない予定です。
- 再履修の場合、状況によって、講義と演習で別クラスを履修するなどが可能です。詳しくは
  https://www.titech.ac.jp/enrolled/life/undergraduate_timetables.html
  の「再履修の申告について」を参照のこと。

http://www.math.titech.ac.jp/~shibata/lecture/1Q_F/

私の氏名(柴田将敬)で google 検索してもたどりつけます。

講義で使用したスライドや、配布したプリントの PDF ファイルが参照できます。必要に応じて利用してください。

- 高校で学んだ数学・特に 1 変数関数の微分積分を思い出す。
- 偏微分が扱えるようになる。特に合成関数の偏導関数の公式を理解する。
- 重積分が扱えるようになる。

火・木の柴田が担当する講義の部分は、次の流れで行う予定です。
ただし、変更の可能性もあります。

- 講義の情報(zoom のリンク・講義で使うスライド)は、OCWi のメールで案内(出来れば前日中)
- 講義は zoom 上でスライドを解説する形で講義
- その他: レポート課題を出題するので、各自取り組んで、締め切りまでに提出

zoom に接続できる環境が用意できない学生でも、最低限、教科書・スライドを参照して勉強し、レポート課題を提出することで、受講することが出来ます。

レポート課題

- 毎回(?)レポート課題を出します。
- 所定の用紙に手書きしたものを PDF ファイルで、OCW-i 経由で提出すること。
- 印刷→書き込み→スキャンでも、タブレットなどを用いて PDF ファイルに書き込んで提出でも構いません。
- 締め切りは、講義の日の 23:50 まで。
- 解答は、途中経過もわかるように、そして、用紙におさまるようにまとめること。

補足 0.1

手書きのレポートをスマホのカメラで撮影して PDF ファイルを作成するために、いろいろなソフトがありますが、CamScanner というソフト(Android, iOS)は、学生・教職員は教育機関のメールアドレスで登録ことで、無料で正式版にアップグレードできます。

数学相談室

数学系では、全学の一年生と数学系の学部生を対象に、数学相談室を開いています。そこでは、たとえ授業と直接の関係が無くても、数学に関する質問・疑問や相談などに、数学系の修士課程・博士課程の先輩や教務補佐員が答えてくれます。
学習の一助として利用して下さい。

例年は本館の講義室で開催されていますが、前期は zoom による開催になります。

詳しくは下記を参照してください。
http://www.math.titech.ac.jp/~jimu/Syllabus/R02(2020)/questiontime.html

高校までは、とてつもない労力と時間をかけて整備された教科書や学習指導要領によって、数学用語・記号も統一され(例外はあるかも)ていました。
しかしながら、それらは、日本における高校までの教育をスムーズにやるために統一されているだけであって、世界的な標準でもないし、より複雑なものを記述しようとするときや、分野によっては、別の用語や記号がふさわしい・便利なことがあります。
結果として、流儀によって、また、分野によって、数学用語・記号の定義が異なる場合があります。

また、高校までの教科書は丁寧に書かれ、非常に多くの人数に使われることによって、記述ミスのような間違いはほとんどありません。しかし、それらと比較すると、大学以降で使う教科書・参考書は、多くの記述ミスなどを含んでいます。

きちんと考えれば、ミスがあっても気づいたり修正できるところが数学の良いところです。本に書かれたことを鵜呑みにするのではなく、おかしいなと思ったら、他の本等と比較したり、誰かに質問したりしましょう。

教科書

- 吹田信之・新保経彦 共著「理工系の微分積分学」学術図書出版

この講義・演習の教科書です。数学用語の定義や定理など理論的なことは、この教科書に基づきます。例外はあります。

参考書

- 三宅敏恒 著「入門微分積分」培風館

この講義・演習の参考書です。

上記の教科書の例や問となっている問題・参考書の各節末にある問題が解ける程度の理解が、だいたい、単位取得の最低条件になります。

教科書や参考書がなくても大丈夫か?

上記の教科書と参考書が両方無くても、講義を受講することは可能です。私の説明がおかしいな?と思ったときに比較することが出来るし、教科書があった方が便利だと思います。

微分積分の教科書は非常に多く出版されています。各自・自分の好きなものを選んで勉強してかまいません。私の好みでいくつか挙げておきます。

その他の参考書

- ヤン・ブレジナ 柳田英二 共著「Introduction to Calculus in English ―英語で学ぶ微分積分学―」裳華房
  日本の標準的な微分積分の教科書の英語版。日本の高校までの数学を前提にしているので、単に洋書の微分積分学の本を読むより、読みやすいはず。
- 杉浦光夫 著 「解析入門 I・II」東大出版会
  微分積分だけでなく、続く発展的な話題も扱っています。
- 金子晃 著「数理系のための基礎と応用 微分積分 I・II」サイエンス社
  ちょっと変わった雰囲気の本で、話題もちょっと変わっていておもしろいかもしれません。
- 赤攝也 著「微分学」「積分学」「実数論講義」日本評論社
  三部作。微分積分学の理論構成に興味がある人向け。

web 上で入手できるもの

- http://www.math.titech.ac.jp/~lecture2020/index.html
  東工大数学教室で作ったビデオ教材です。
  数学系の教員 3 名で一変数の微分積分、多変数の微分、多変数の積分を講義しています。
- https://www.gakushuin.ac.jp/~881791/mathbook/index.html
  学習院大学の田崎晴明先生による、物理を学ぶための大学レベルの数学の教科書です。
  とても丁寧に解説されていると思います。
- http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yamaguti/jugyo/jugyo.html
  大阪府立大学の山口睦先生の授業関係の web ページです。
  「微積分学 I・II の演習問題」の PDF ファイルに、演習問題が大量にあります。

他にもいろいろあります。ちなみに、微分積分学は、英語では calculus なので、「calculus textbook」とかで検索すれば、いろいろ出てきます。

第 1 節 写像と関数

目標

写像・関数に関する基本的な用語をまとめておく。

この講義では、次のような記号を使います。

- $\mathbb{R}$:実数全体の集合。 $\mathbb{R}$
- $\mathbb{Z}$:整数全体の集合。 $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$:自然数全体の集合。 $\mathbb{N}$ $\mathbb{N}$
- $\mathbb{Q}$:有理数全体の集合。 $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{C}$:複素数全体の集合。 $\mathbb{C}$
- $\varnothing$:空集合。ϕ (ギリシャ語のファイ)とは違います。
- $\leq$: $\leqq$ と同じ。黒板では $\leqslant$ とも書く。
- $\geq$: $\geqq$ と同じ。黒板では $\geqslant$ とも書く。
- $\forall$:「全ての」「任意の」「for all」「for any」の意味。
- $\exists$:「ある〜が存在して」「there exists」の意味。

定義 1.1 (写像・関数)

A, B を集合とする。
A のそれぞれの元 x について、それを B の元に対応させる 1 つの規則が定まっているとき、その対応を写像という。A は定義域と呼ばれる。

さらに、B が「数」であるときは、写像という代わりに関数ともいう。
B が実数であるとき、実数値関数、B が複素数であるとき、複素数値関数、B がベクトルであるとき、ベクトル値関数などという。

補足 1.2

- $f : A \to B$ と書いたら、f が(定義域) A から B への写像であることを意味する。
- x が $f(x)$ に対応する写像であるとき、$x \mapsto f(x)$ と書くことがある。
- この講義では定義域 A が空集合である場合は考えない。

写像: map, 定義域: domain, 関数: function, 実数値: real valued, 複素数値: complex valued, ベクトル値: vector valued

例 1.3

$x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = x^2$ で定まる実数値関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

例 1.4

$x \in [0, 1]$ に対して $f(x) = x^2$ で定まる実数値関数 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

例 1.5

$x \in \mathbb{C}$ に対して $f(x) = x^2$ で定まる複素数値関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

例 1.6

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(x, y) = x^2 + y^2$ で定まる実数値関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

定義 1.7 (単射)

写像 $f : A \to B$ で次の性質を満たすものを考える。

> $\forall x, \forall y \in A$ に対して、$x \neq y$ ならば $f(x) \neq f(y)$ が成り立つ。

このとき、写像 f は<u>単射(1 対 1)</u>である。という。

例 1.8

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ は単射。

例 1.9

$f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ は単射でない。例えば、$f(-1) = 1 = f(1)$ になっている。

単射: injective, 1 対 1 : one-to-one

定義 1.10

値域写像 $f : A \to B$ に対して、

$$f(A) := \{f(x); x \in A\}$$

を f の値域という。

$A := B$ というのは、B で A を定義するという意味。

例 1.11

$f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ の値域は $[0, 4]$.

値域: range

定義 1.12 (逆写像)

写像 $f : A \to B$ は単射とする。このとき、任意の $y \in f(A)$ に対して、$f(x) = y$ となる $x \in A$ がただ一つ存在する。この対応 $y \mapsto x$ で定まる写像(定義域は $f(A)$ となる)を f の逆写像といい、f^{-1} と表す。

例 1.13

$f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ の値域は $[0, 4]$ で、f は単射。

逆写像は $f^{-1} : [0, 4] \to [0, 2]$, $y \mapsto \sqrt{y}$. ($x \mapsto \sqrt{x}$ と書いても同じ意味。)

逆写像: inverse map, 逆関数: inverse function

定義 1.14 (グラフ)

写像 $f : A \to B$ に対して、

$$\{(x, y) \in A \times B; x \in A, y \in B, y = f(x)\}$$

を f のグラフという。

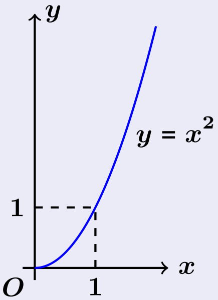
補足 1.15

- $f : A \to B$ のグラフは、$A \times B = \{(x, y); x \in A, y \in B\}$ の部分集合になっている。
- A, B が $\mathbb{R}$ (またはその部分集合)の場合は、グラフは図示しやすい。

グラフ: graph

例 1.16

$f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ のグラフを図示すると、下図の青い部分。



定義 1.17 (区間)

$-\infty < a < b < \infty$ とする。
次のものを $\mathbb{R}$ の<u>区間</u>と呼ぶ。区間の端の点 a, b は<u>端点</u>という。

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$.
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$.
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$.
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$, $[a, a] := \{a\}$.
- $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$.
- $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$.
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$.
- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$.
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

区間: interval, 端点: endpoint

定義 1.18 (有界集合)

$\mathbb{R}$ の部分集合 $A \neq \emptyset$ を考える。

> ある $M > 0$ が存在して、各 $x \in A$ に対して $|x| \leq M$ が成り立つ

とする。

このような A は<u>有界</u>であるという。有界でないものは、<u>非有界</u>である、と呼ばれる。

例 1.19

$\mathbb{N}$ は $\mathbb{R}$ の非有界集合。

例 1.20

$[-1, 1] \cup [2, 3)$ は $\mathbb{R}$ の有界集合。

有界: bounded, 非有界: unbounded

定義 1.21 (開区間)

区間 I に対して次が成り立つとする。このとき、I を<u>開区間</u>という。

> 任意の $x \in I$ について、$\delta = \delta(x) > 0$ を小さくとれば $(x - \delta, x + \delta) \subset I$ が成り立つ。

定義 1.22 (閉区間)

区間 I に対して次が成り立つとする。このとき、I を<u>閉区間</u>という。

> 任意の実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について、$a_n \in I$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ ならば $a \in I$ が成り立つ。

例 1.23

$(0, 1)$ は開区間、$[0, 1]$ は閉区間。

開区間: open interval, 閉区間: closed interval

まとめると次のようになる。

区間	有界か?	開か?・閉か?
(a,b)	有界	開
$[a,b)$	有界	
$(a,b]$	有界	
$[a,b]$, $[a,a]$	有界	閉
$(-\infty,b)$	非有界	開
$(-\infty,b]$	非有界	閉
(a,∞)	非有界	開
$[a,\infty)$	非有界	閉
$(-\infty,\infty)$	非有界	開かつ閉

有界開区間とは (a,b) のことで、有界閉区間とは $[a,b]$ (or $[a,a]$)のことである。

補足 1.24

教科書では、開区間とは (a,b) のことで、閉区間とは $[a,b]$ のことである。つまり、**教科書の開区間は有界開区間のことで、閉区間は有界閉区間のことである**。

第 2 節 初等関数

目標

三角関数・指数関数など、高校までで学ぶ関数についてまとめた後、逆三角関数を導入する。

定義 2.1 (多項式関数)

$\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_0, \dots, a_\ell \in \mathbb{R}$ とする。

$x \in \mathbb{R}$ に対して、多項式 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ で定まる関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を<u>多項式関数</u>と呼ぶ。

補足 2.2

- 定義域を $\mathbb{R}$ より狭いものに制限して考えることもある。
- 多項式関数のことも多項式と呼ぶことも多い。ただし、精確ではない。

多項式関数: polynomial function

定義 2.3

f, g を多項式関数、I を $\mathbb{R}$ の部分集合、$g(x) \neq 0$ $(x \in I)$ とする。

$h(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ で定まる I 上の関数 h を、<u>有理関数</u>という。

補足 2.4

- g は多項式関数なので、g の零点全体 $Z := \{x \in \mathbb{R}; g(x) = 0\}$ は、有限集合となる。そして、$h = f/g$ は、$\mathbb{R} \setminus Z = \{x \in \mathbb{R}; g(x) \neq 0\}$ で定義される。

例 2.5

$\dfrac{x}{1+x^2}$, $\dfrac{1}{1-x^2}$, $1 + x + x^2$, etc.

有理関数: rational function

定義 2.6 (指数関数)

指数関数とは、次の性質を満たすものである。

- $e^x = \exp x$ は $\mathbb{R}$ 上で定義され、正値、単調増加。
- $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, 特に、$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. (極限)
- $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^0 = 1$. (指数法則)
- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$. (導関数は自分自身)

補足 2.7

- $a > 0$, $a \neq 1$ とする。より一般に、$a^x = \exp(x \log a)$ も指数関数と呼ばれる。

指数関数: exponential function

定義 2.8 (対数関数)

対数関数とは、次の性質を満たすものである。

- $\log x$ は $(0, \infty)$ 上で定義され、単調増加。
- $\log x$ (定義域は $(0, \infty)$)と e^x (定義域は $\mathbb{R}$)は互いに逆関数になっている。
- $\log xy = \log x + \log y, \quad \log \dfrac{x}{y} = \log x - \log y, \quad \log 1 = 0.$
- $y \log x = \log x^y \ (x > 0, y \in \mathbb{R}).$
- $\dfrac{d}{dx} \log x = \dfrac{1}{x}.$

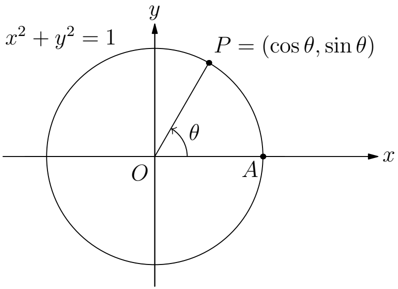
補足 2.9

- $a > 0,\ a \neq 1$ とする。より一般に、$\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$ も対数関数と呼ばれる。

対数関数: logarithmic function

三角関数についての性質をまとめておく。これらが全てではないが、この程度は思い出しておくこと。

- 図のように、円 $x^2+y^2=1$ 上の点を P とする。弧 AP の「長さ」を θ とするとき、P の座標は $(\cos\theta, \sin\theta)$ である。
- $\sin\theta$, $\cos\theta$ は $\mathbb{R}$ 上で定義され、2π 周期、連続。
- $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ は $\pi/2 + n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ 以外で定義され、π 周期、連続。



三角関数: trigonometric function, 正弦: sine, 余弦: cosine, 正接: tangent

三角関数同士の関係

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

2 倍角に関するもの

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta,$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = \cos^2\theta - 1,$$
$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}, \quad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2},$$

加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.$$

積と和に関するもの

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta),$$
$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta),$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta),$$
$$2\sin\alpha\sin\beta = -\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta).$$

極限

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{d}{d\theta}\sin\theta\,\bigg|_{\theta=0} = \cos 0 = 1.$$

導関数

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta = \sin(\theta+\pi/4),$$
$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta = \cos(\theta+\pi/4),$$
$$\frac{d}{d\theta}\tan\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

$\sin$, $\cos$, $\tan$ の逆数として定義される三角関数もしばしば使われる。これらの三角関数に関する種々の公式もあるが、ここでは扱わない。
本や論文で使われることもあるので、そういうものがあるということは覚えておくべき。

cosecant function

$$\csc\theta = \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}.$$

secant function

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}.$$

cotangent function

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}.$$

三角関数の逆関数も応用上よく出てくるので、ここで定義しておきたい。しかしながら、$\sin x$ は $\mathbb{R}$ 上で単射でないので、一工夫しないと逆関数は定義できない。

定義 2.10 (逆三角関数)

- $\sin : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ の逆関数を $\sin^{-1}$ で表す。逆正弦関数と呼び、$\arcsin$ とも表す。
- $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ の逆関数を $\cos^{-1}$ で表す。逆余弦関数と呼び、$\arccos$ とも表す。
- $\tan : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ の逆関数を $\tan^{-1}$ で表す。逆正接関数と呼び、$\arctan$ とも表す。

補足 2.11

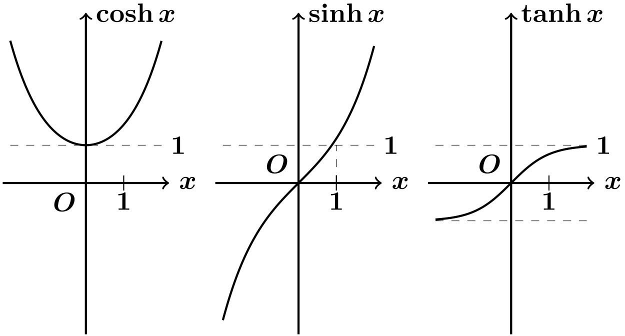
- 教科書の説明は少し異なるが、最終的に定まるものは同じ。
- 定義域を変えると、逆関数は別なものになってしまう。状況によっては、別な定義が便利だったりするので、逆三角関数の定義が異なることがあるので注意。この講義では、上記の定義域で定めた逆三角関数のみを考える。

逆**関数: inverse ** function, $\arcsin$: arcsine, $\arccos$: arccosine, $\arctan$: arctangent

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

は、双曲線関数と呼ばれる。($\sinh$ は hyperbolic sine, $\cosh$ は hyperbolic cosine, $\tanh$ は hyperbolic tangent.)

すぐにわかるように、$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ であり、$(\cosh t, \sinh t)$ は双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の $x > 0$ の部分をパラメータ表示したものになっている。($(\cos t, \sin t)$ が円 $x^2 + y^2 = 1$ をパラメータ表示したものであることと似ている。)



$\sinh x$ は $(-\infty, \infty)$ 上で単調増加、連続、値域は $(-\infty, \infty)$.
$\cosh x$ は $[0, \infty)$ 上で単調増加、連続、値域は $[1, \infty)$.
$\tanh x$ は $(-\infty, \infty)$ 上で単調増加、連続、値域は $(-1, 1)$.

となっている。(注: $\cosh$ については単調増加になるよう定義域を制限している。)
このことから、それぞれの逆関数が存在し、次のようになる。

$\sinh^{-1} x := \operatorname{arsinh} x := \log(x + \sqrt{x^2+1})$:
$(-\infty, \infty)$ 上で単調増加、連続、値域は $(-\infty, \infty)$.

$\cosh^{-1} x := \operatorname{arcosh} x := \log(x + \sqrt{x^2-1})$:
$[1, \infty)$ 上で単調増加、連続、値域は $[0, \infty)$.

$\tanh^{-1} x := \operatorname{artanh} x := \dfrac{1}{2} \log \dfrac{1+x}{1-x}$:
$(-1, 1)$ 上で単調増加、連続、値域は $(-\infty, \infty)$.

なお、arsinh は、「area hyperbolic sine」とか「inverse hyperbolic sine」とか読む。ar は area に由来するので、$\operatorname{arcsinh}$ などと書かれることも多いが、これは誤記。

第 3 節 連続関数

目標

連続関数に関連する用語の定義・性質をまとめておく。

長い歴史とともに数の概念は整備されてきた。端的にいって、個数を表すことができる自然数から出発し、量を表すことができ、四則演算も出来る有理数、そして、極限がうまく扱えるように拡張されたものが実数である。

実数とは?

実数全体 $\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ を含む集合で、実数については次が満たされる。

- 四則演算が出来る。(教科書 p.3 の (A))
- 大小関係がある。(教科書 p.3 の (B))
- 実数の性質(連続性)を満たす。(教科書 p.4 の (C))

実数の性質は、極限の概念と深く結びついており、例えば、中間値の定理や平均値の定理も、実数の性質から導かれるもの(ある意味で同値なもの)になっている。それらをきちんと学ぶためには、ϵ 論法などによる極限の概念の厳密な扱いが必要になる。

この講義では高校までで学んだように、極限をいくぶんいい加減に扱い、ϵ 論法を用いたより厳密な扱いはしない。従って、実数の性質と結びついた定理は、証明しない。

数列の極限に関しては、改めて説明はしない。最低限の用語・定理については、教科書 §2 (I) を参照のこと。

定義 3.1 (関数の極限)

I を $\mathbb{R}$ の開区間、$a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ を考える。ただし、f は a では定義されていなくても良い。

> ある $A \in \mathbb{R}$ が存在して、$x \neq a$ が a に限りなく近づくとき、$f(x)$ が A に限りなく近づく。

このとき、「$x \to a$ のとき $f(x)$ は収束する」という。また、A を $x \to a$ のときの $f(x)$ の極限といい、$\lim_{x\to a} f(x) = A$ と表す。

> x が a に近づくとき、$f(x)$ がいくらでも大きくなる。

となっているときは、「$f(x)$ は ∞ に発散する」といい、$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ と表す。
$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ も同様に定める。

補足 3.2

収束しないことを、発散するという。つまり、発散することは、∞ (または $-\infty$)に発散することを意味しない。

収束する: converge, 発散する: diverge

補足 3.3

$a \in \mathbb{R}$, $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ に対して、$\lim_{x\to\infty} f(x)$ なども同様に考える。

定義 3.4

$I \subset \mathbb{R}$ を開区間、$f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ とする。

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ のとき、f は a で<u>連続</u>である、という。

補足

書き換えると、$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x)$ ということなので、連続性というのは、lim と f の順序交換が出来るということに対応していることがわかる。

定理 3.5

$I \subset \mathbb{R}$ を開区間、$f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, f, g は a で連続、$c \in \mathbb{R}$ とする。

このとき、次の関数は、a で連続である。

$f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $cf(x)$, $f(x)g(x)$,
$f(x)/g(x)$ (ただし $g(a) \neq 0$ とする), $\max\{f(x), g(x)\}$, $\min\{f(x), g(x)\}$, $|f(x)|$.

連続: continuous

定理 3.6

$I, J \subset \mathbb{R}$ を開区間、$f : I \to J$, $a \in I$, f は a で連続、g は $f(a)$ で連続とする。

このとき、$x \mapsto g(f(x))$ で定まる合成関数 $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ は、a で連続。

定理 3.7

I を開区間(開区間の和でも良い)、$f : I \to \mathbb{R}$ とする。

> 任意の $a \in I$ に対して、f が a で連続である

とき、f は I 上で連続という。

このような f を I 上の連続関数という。

例 3.8

$a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ とする。
$x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ で定まる $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は、$\mathbb{R}$ 上の連続関数となる。

連続関数: continuous function

定義 3.9 (片側極限)

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b \to \mathbb{R})$ を考える。

x が a に右から近づくときの $f(x)$ の極限を f の a における<u>右極限</u>という。その極限値は

$$\lim_{x \to a+} f(x),\ \lim_{x \to a+0} f(x),\ \lim_{x \searrow a} f(x)\ \lim_{x \downarrow a} f(x)$$

などと表す。左極限も同様に定める。

定義 3.10 (右連続・左連続)

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ を考える。

$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$ であるとき、f は a で<u>右連続</u>であるという。

左連続も同様に定める。

右極限: limit from the right, 右連続: right continuous

例 3.11

定義 3.12 (閉区間での連続性)

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を考える。

f が (a, b) 上連続、a で右連続、b で左連続であるとき、f は $[a, b]$ 上で連続であるという。

他の区間($(a, b]$ など)での連続性も同様に定める。

定理 3.13 (中間値の定理)

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(a) \neq f(b)$ とする。

ℓ を $f(a)$ と $f(b)$ の間の実数とすると、$f(c) = \ell$ となる $c \in (a, b)$ が存在する。

中間値の定理: intermediate value theorem

I を $\mathbb{R}$ の区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。このとき、$f(x) = 0$ となる x を探す(方程式 $f(x) = 0$ の解 x を一つみつける)問題を考える。

$a, b \in I$ で $f(a) < 0 < f(b)$ となっていると仮定する。さらに、$a < b$ として一般性を失わない。

中間値の定理より、$f(x) = 0$ となる $x \in (a, b)$ が存在する。その証明と考えれば、次のように近似値を求めることが出来る。

まず、$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ を計算する。

- $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$ なら、$\dfrac{a+b}{2}$ が求める解。作業終了。
- $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0$ なら、$\left(a, \dfrac{a+b}{2}\right)$ 上に解がある。
- $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$ なら、$\left(\dfrac{a+b}{2}, b\right)$ 上に解がある。

この作業を n 回繰り返すと、少なくとも、幅 $\dfrac{b-a}{2^n}$ の区間内に解があることがわかる。

この方法は二分法などと言われる。

定義 3.14 (最大値・最小値)

$A \neq \emptyset$ を $\mathbb{R}$ の部分集合、$f : A \to \mathbb{R}$ とする。

> ある $c \in A$ が存在して、任意の $x \in A$ に対して $f(x) \leq f(c)$ が成り立つ

とき、$f(c)$ を f の A 上での<u>最大値</u>といい、c を<u>最大点</u>という。

最小値・最小点も同様に定める。

定理 3.15 (最大・最小の存在)

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f は $[a, b]$ 上で連続とする。

このとき、f は $[a, b]$ 上で最大値・最小値を持つ。

最大値: maximum value, 最小値: minimum value, 最大点: maximum point, 最小点: minimum point

定義 3.16

I を $\mathbb{R}$ の区間とし、$f : I \to \mathbb{R}$ を考える。

$\forall x, y \in I,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ が成り立つとき、f は I 上で<u>単調増加</u>であるという。
$\forall x, y \in I,\ x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$ が成り立つとき、f は I 上で<u>非減少</u>であるという。
$\forall x, y \in I,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ が成り立つとき、f は I 上で<u>単調減少</u>であるという。
$\forall x, y \in I,\ x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$ が成り立つとき、f は I 上で<u>非増加</u>であるという。

これらを総称して、f は I 上で<u>単調</u>であるという。

補足 3.17

単調増加・非減少・単調減少・非増加を、それぞれ、狭義単調増加・広義単調増加・狭義単調減少・広義単調減少ということもある。

単調増加: increasing, 非減少: non-decreasing, 単調減少: decreasing, 非増加: non-increasing, 単調: monotone,
狭義単調増加: strictly increasing, 狭義単調減少: strictly decreasing

定理 3.18 (逆関数の存在・連続性)

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は単調増加な連続関数とする。

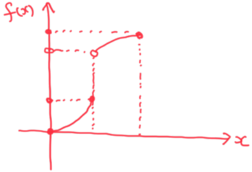
このとき、f の逆関数 $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ が存在し、f は $[a, b]$ 上で連続である。

要は、連続で単調増加(または単調減少)な関数の逆関数は、やはり連続となる。

補足 3.19

- 上の定理と同様に、単調減少な連続関数についても、逆関数が存在する。
- より一般の区間に対しても、同様の定理が成り立つ。
- 単調増加・単調減少な関数であれば単射となるので、もちろん逆関数は存在する。しかし、逆関数の定義域が区間になるとは限らない。

例



講義の終わり、質疑応答の時間にあった質問と回答です。

- 必ず PDF で課題提出しなければならないですか?PDF 作成が困難なので画像で提出したいです。
  $\longrightarrow$ 課題は PDF で提出です。どうがんばっても不可能な場合は、柴田までメールで提出してください。
- レポート課題の提出ファイル名の指定はありますか?
  $\longrightarrow$ 課題のファイル名は学籍番号で。
- 講義に使った資料は公開されますか?
  $\longrightarrow$ 講義のスライドなどは、OCW-i と私の講義の web サイトに公開されます。
- 集合の R や Z や Q の手書きの書き方を教えてください。
  $\longrightarrow$ p.16 に書き込みました。
- レポートの 1-3 の説明はどの程度の説明をすればいいですか?
  $\longrightarrow$ 勉強していない自分が見て理解できる程度には説明しましょう。
- p.37 補足「この講義では、上記の定義域で定めた 逆三角関数のみを考える」とは課題にも適用されるという扱いでいいですか?
  $\longrightarrow$ はい。それで良いです。

- :=ってどういう意味ですか?
  $\longrightarrow$ 右辺で左辺を定義するという意味です。p.20 に追加しました。
- 2Q 対面式授業開始後も授業形式はスライドですか?それとも板書ですか?
  $\longrightarrow$ 対面式授業が再開されたら、黒板も使います。(私が担当するものでは。もちろんコロナの状況によります。)
- p.21 の逆写像についてです。単射であることと同時に全射であることも必要ではないでしょうか?
  $\longrightarrow$ 全射という用語を導入せずに説明したのですが、知っている人向けに説明すると、$f : A \to B$ があれば、f は自動的に A から $f(A)$ への全射になります。なので、f が単射なら、$f : A \to f(A)$ は全単射になり、逆写像が存在します。
- 間違いがわかった部分は訂正版として OCWi に上がりますか?
  $\longrightarrow$ はい。訂正版は OCW-i にのせます。
- p.54 補足で、最後のスライドの逆関数の定義域が区間になるとは限らないってどういう意味ですか?
  $\longrightarrow$ 例えば、単調増加関数(単射となる)が、連続ではない(ジャンプがある)場合、値域が区間になりません。p.54 に例を書き込みました。