Least energy solutions to semi-linear elliptic problems on metric graphs

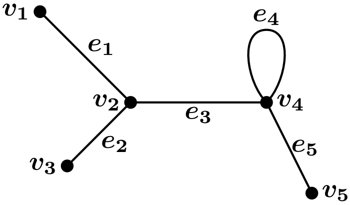
柴田将敬（東京工業大学 理学院）

非線形偏微分方程式と変分問題（首都大学東京）
2020 年 2 月 8 日（土）

倉田和浩先生（首都大学東京）との共同研究

- $G = G(V, E)$: a graph, where V is a set of vertices and E is a set of edges. We assume G is connected.
- G is a **metric graph** if each edge $e \in E$ is isometric to $[0, \ell(e)]$, where $\ell(e) > 0$ is the length of e.
- We assume $\#E < \infty$.
- A metric graph G is compact if $\ell(e) < \infty$ for each $e \in E$.
- $e \succ v$ means that a edge e is incident to a vertex v.
- $\deg v$ is the number of edges that are incident to v. We assume $\deg v \neq 2$.
- $v \in V$ is **an internal vertex** if $\deg v \geq 3$.
- $V_{\text{int}} := \{v \in V; \deg v \geq 3\}$: a set of internal vertices.
- $v \in V$ is **an end vertex** if $\deg v = 1$.
- $V_{\text{end}} := \{v \in V; \deg v = 1\}$: a set of end vertices.

Example



(P_ε) $-\varepsilon^2 \Delta u + u = |u|^{p-1} u$ on G, $u(v) = 0$ $(v \in V_{\mathrm{end}})$.

Here, $1 < p < \infty$ is a contant, $\varepsilon > 0$ is a parameter, ∇u is first derivative of u, and Δu is second derivative of u.

More precisely, u is a solution of (P_ε) if

- u is a classical solution on each edge e, i.e.
  $-\varepsilon^2 \Delta u^{(e)} + u^{(e)} = |u^{(e)}|^{p-1} u^{(e)}$ on $(0, \ell(e))$,
  where $u^{(e)}$ is the restriction of u on e.
- u is continuous at $v \in V_{\mathrm{int}}$, i.e.
  $u^{(e)}(v) = u^{(e')}(v)$ if $e \succ v$ and $e' \succ v$.
- u satisfies the Kirchhoff law at $v \in V_{\mathrm{int}}$, i.e. $\displaystyle\sum_{e \succ v} \partial u^{(e)}(v) = 0$,
  where $\partial u^{(e)}(v)$ is the outward derivative of $u^{(e)}$ at v.
- u satisfies the Dirichlet boundary condition at $v \in V_{\mathrm{end}}$.

Remark

- $V_{\mathrm{end}} = \emptyset$ なら、境界条件は不要。
- 境界条件は Neumann 条件も考えるが、今回は Dirichlet 条件のみ。

$H^1(G)$ is a set of continuous functions on G with $u^{(e)} \in H^1((0,\ell(e)))$ for $e \in E$.

H^1-norm

$$\|u\|^2_{H^1(G)} := \int_G |\nabla u|^2 + |u|^2\,dx := \sum_{e\in E}\int_0^{\ell(e)} |\nabla u^{(e)}|^2 + |u^{(e)}|^2\,dx.$$

Similary, we define L^r-norm $(1 \le r \le \infty)$.
$H^1_0(G) := \{u \in H^1(G), u(v) = 0 \text{ if } v \in V_{\text{end}}\}$.

Energy functional

$$J_\varepsilon(u) := \frac{\varepsilon}{2}\int_G |\nabla u|^2\,dx + \frac{\varepsilon^{-1}}{2}\int_G |u|^2\,dx - \frac{\varepsilon^{-1}}{p+1}\int_G |u|^{p+1}\,dx$$

Then $J_\varepsilon \in C^1(H^1_0(G), \mathbb{R})$. u is a solution of $(P)_\varepsilon \iff u$ is a critical point of J_ε.

Least energy

$$\sigma_\varepsilon := \inf_{u\in H^1_0(G)\setminus\{0\}} \max_{t>0} J_\varepsilon(tu) = \inf_{u\in H^1_0(G)\setminus\{0\}, J'_\varepsilon(u)=0} J_\varepsilon(u) > 0.$$

There exists a least energy solution $u_\varepsilon \in H^1(G)$ such that $\sigma_\varepsilon = J_\varepsilon(u_\varepsilon)$.
Moreover, we can assume u_ε is positive.

Recently, the following variational problem has been studied.

Assume $1 < p < 5$. For given $\mu > 0$,

$$\min_{u \in M_\mu} J_1(u), \quad M_\mu := \Big\{ u \in H^1(G); \|u\|^2_{L^2(G)} = \mu \Big\},$$

If u is a minimizer,

$$(Q_\mu) \quad -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-1}u \text{ in } G, \quad \|u\|^2_{L^2(G)} = \mu, \text{ Neumann b.c,}$$

where λ is a Lagrange multiplier. Moreover, $e^{i\lambda t}u(x)$ is a stable standing wave of Nonlinear Schrödinger equation.

Known results

- [Adami, Serra, Tilli, Calc. Var. 54 (2015)] Existence and non-existence results of minimizers for noncompact metric graphs.
- [Cacciapuoti, Dovetta, Serra, Milan J. Math. 86 (2018)] Stability and non-stability results of constant solutions for compact metric graphs.
- [Adami, Serra, Tilli, Calc. Var. 58 (2019)] For each finite edge e and large μ, they construct a solution u_μ such that u_μ takes maximum on e.

Roughly speaking, a minimizer u_μ for large μ corresponds to a least energy solution of (P_ε) for small ε.

Known result about (P_ε) (with the Neumann boundary condition)

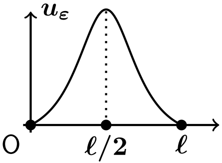
- [Y. Li, F. Li, J. Shi, J. Math. Anal. Appl. 459 (2018)]
  Existence and non-existence results of least energy solutions for noncompact metric graphs.
  On compact metric graphs, if ε is sufficiently large, least energy solutions are constant solutions ($u_\varepsilon \equiv \pm 1$).

Aim

- To study asymptotic behavior of least energy solutions as $\varepsilon \to 0$.

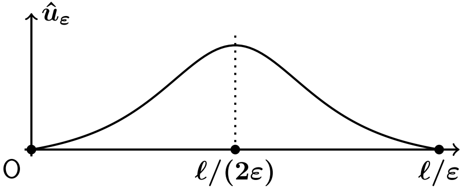
$$-\varepsilon^2 \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = u_\varepsilon^p \text{ on } (0,\ell),\ \ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(\ell) = 0.$$

For small $\varepsilon > 0$, a least energy solution u_ε is like following.

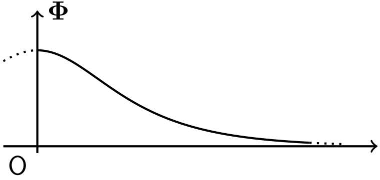


Put $\hat{u}_\varepsilon(x) := u(\varepsilon x)$. Then

$$-\Delta \hat{u}_\varepsilon + \hat{u}_\varepsilon = \hat{u}_\varepsilon^p \text{ on } (0,\ell/\varepsilon),\ \ \hat{u}_\varepsilon(0) = \hat{u}_\varepsilon(\ell/\varepsilon) = 0.$$



$(\varepsilon \to 0)$ $\longrightarrow$



As $\varepsilon \to 0$, $\hat{u}_\varepsilon(\cdot + \ell/(2\varepsilon)) \to \Phi$, where Φ is a unique solution of

$$-\Delta\Phi + \Phi = \Phi^p,\ \ \Phi > 0 \text{ on } \mathbb{R}, \nabla\Phi(0) = 0,\ \ \lim_{|x|\to\infty} \Phi(x) = 0.$$

We call Φ the **ground state**.

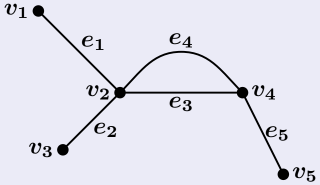
Theorem A [Kurata-S., preprint]

Suppose that G is a compact metric graph, G has no loop, $V_{\text{int}} \neq \emptyset$.
Let u_ε be a positive least energy solution for each $\varepsilon > 0$.

(i) For sufficiently small $\varepsilon > 0$, u_ε has exactly one local maximal point $x_\varepsilon \in G \setminus V$.

(ii) Let $e_\varepsilon \in E$ be $x_\varepsilon \in e_\varepsilon$. Then, as $\varepsilon \to 0$,

- x_ε converges to the center of e_ε.
- $u_\varepsilon^{(e_\varepsilon)}(\varepsilon(x + x_\varepsilon)) \to \Phi(x)$ in C^2_{loc}.
- $u_\varepsilon \to 0$ uniformly on $G \setminus e_\varepsilon$.



(iii) e_ε is a longest edge, i.e., $\ell(e_\varepsilon) = \max_{e\in E} \ell(e)$.

(iv) $\sigma_\varepsilon = \sigma + \exp\left(\dfrac{-2\ell(e_\varepsilon)}{\varepsilon}(1 + o(1))\right)$ as $\varepsilon \to 0$.

Here, $\sigma := \frac{1}{2}\|\Phi\|^2_{H^1(\mathbb{R})} - \frac{1}{p+1}\|\Phi\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R})}$ is the energy of the ground state Φ.

Remark

- Neumann 境界条件の場合も、上記論文で、対応する結果は得られている。
- 非線形項 $|u|^{p-1}u$ をある程度一般化することは出来る。

Theorem B [S., in preparation]

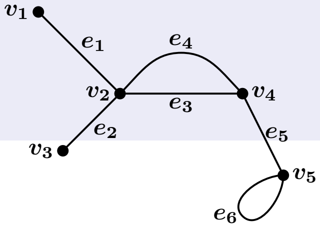
Suppose that G is a compact metric graph, $V_{\text{int}} \neq \emptyset$, G has a loop, if $e \in E$ is a loop and $e \succ v$, then $\deg v \neq 4$, and $\mathcal{E} := \{e \in E; e \text{ is a loop}, e \succ v, \deg v = 3\} \neq \emptyset$.
Let u_ε be a positive least energy solution for each $\varepsilon > 0$.

(i) For sufficiently small $\varepsilon > 0$, u_ε has exactly one local maximal point $x_\varepsilon \in G \setminus V$.

(ii) Let $e_\varepsilon \in E$ be $x_\varepsilon \in e_\varepsilon$. Then, as $\varepsilon \to 0$,

- x_ε converges to the center of e_ε.
- $u_\varepsilon^{(e_\varepsilon)}(\varepsilon(x - x_\varepsilon)) \to \Phi(x)$ in C^2_{loc}.
- $u_\varepsilon \to 0$ uniformly on $G \setminus e_\varepsilon$.

(iii) e_ε is a shortest edge in $\mathcal{E}$, i.e., $\ell(e_\varepsilon) = \min_{e \in \mathcal{E}} \ell(e)$.



Theorem C [S., in preparation]

Suppose that G is a compact metric graph, $V_{\text{int}} \neq \emptyset$.

(i) For any $e \in E$, there exists $\varepsilon(e) > 0$ such that
- For $\varepsilon \in (0, \varepsilon(e))$, there exists a positive solution u_ε such that u_ε has exactly one local maximum point x_ε with $x_\varepsilon \in e$.
- x_ε converges to the center of e_ε.
- $u_\varepsilon^{(e)}(\varepsilon(x - x_\varepsilon)) \to \Phi(x)$ in C^2_{loc}.
- $u_\varepsilon \to 0$ uniformly on $G \setminus e$.

(ii) There exists at least $\#E$ positive solutions for sufficiently small $\varepsilon > 0$.

Remark

- ペナルティ法を用いた標準的な議論で証明できる。
- 各 $v \in V_{\text{int}}$ に対し、v に集中するような解もあるはず。(今後の課題)

Notation

- G_ε is the metric graph expanded of G by $1/\varepsilon$.
- For each edge $e = [0, \ell(e)] \in G$, $\hat{e} := e/\varepsilon = [0, \ell(e)/\varepsilon]$ is a edge of G_ε.
- For $x \in e = [0, \ell(e)] \subset G$, $\hat{x} := x/\varepsilon \in \hat{e} = [0, \ell(e)/\varepsilon] \subset G_\varepsilon$.
- For $u \in H^1(G)$, we define $\hat{u} \in H^1(G_\varepsilon)$ by $\hat{u}^{(\hat{e})}(\hat{x}) = u^{(e)}(x)$, $(\hat{x} = x/\varepsilon)$ $(e \in E)$.

$$I(\hat{u}, G_\varepsilon) := \frac{1}{2}\|\hat{u}\|^2_{H^1(G_\varepsilon)} - \frac{1}{p+1}\|\hat{u}\|^{p+1}_{L^{p+1}(G_\varepsilon)} \quad (\hat{u} \in H^1(G_\varepsilon)).$$

Then, we obtain

$$J_\varepsilon'(u) = 0 \Leftrightarrow I'(\hat{u}, G_\varepsilon) = 0, \quad J_\varepsilon(u) = I(\hat{u}, G_\varepsilon).$$

Since u_ε is a least energy solution for $\varepsilon > 0$,

$$I'(\hat{u}_\varepsilon, G_\varepsilon) = 0 \text{ and } \sigma_\varepsilon = I(\hat{u}_\varepsilon, G_\varepsilon) \text{ for } \varepsilon > 0.$$

エネルギー有界性：$\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} I(\hat{u}_\varepsilon, G_\varepsilon) = \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon < \infty$.

$\Downarrow$ $I'(\hat{u}_\varepsilon, G_\varepsilon)\hat{u}_\varepsilon = 0$ $(\Longleftrightarrow \|\hat{u}_\varepsilon\|^2_{H^1(G_\varepsilon)} = \|\hat{u}_\varepsilon\|^{p+1}_{L^{p+1}(G_\varepsilon)})$

$H^1(G_\varepsilon)$-有界性：$\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \|\hat{u}_\varepsilon\|_{H^1(G_\varepsilon)} < \infty$.

$\Downarrow$ Sobolev の埋め込み定理：$\|u\|_{L^\infty(0,\ell)} \le C\|u\|_{H^1(0,\ell)}$ $(\ell \ge 1)$, C: ℓ-indep.

L^∞-有界性：$\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \|\hat{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(G_\varepsilon)} < \infty$.

$\Downarrow$ 方程式 $-\Delta\hat{u}_\varepsilon = \hat{u}_\varepsilon^p - \hat{u}_\varepsilon$

$W^{2,\infty}$-有界性：$\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \|\Delta\hat{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(G_\varepsilon)} < \infty$, $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \|\nabla\hat{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(G_\varepsilon)} < \infty$.

$\Downarrow$ Arzelà-Ascoli の定理, 方程式

（部分列を取れば）各辺上で、ある極限へ C^2_{loc} 収束。

$\Downarrow$ H^1 有界性から極限も H^1 の元、また、極限も方程式を満たす

適当な平行移動で極限は Φ or 0.

まとめると、

u_ε は、極大点 x_ε に集中した peak の足し合わせ。

peak のエネルギー

$\boldsymbol{x_\varepsilon} \in \boldsymbol{G}$ に集中する peak のエネルギーを考える。

- $\boldsymbol{x_\varepsilon}$ が $\boldsymbol{V}$ から十分離れている（$\mathbf{dist}(\boldsymbol{x_\varepsilon}, \boldsymbol{V})/\varepsilon \to \infty$）$\Longrightarrow$ エネルギー $\sim \boldsymbol{\sigma}$.
- $\boldsymbol{x_\varepsilon}$ が $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_{\text{int}}$ に近い $\Longrightarrow$ エネルギー $\sim (\mathbf{deg}\, \boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}/\mathbf{2} \geq \mathbf{3}\boldsymbol{\sigma}/\mathbf{2}$.
- $\boldsymbol{x_\varepsilon}$ が $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_{\text{end}}$ に近い $\Longrightarrow$ ありえない。

このことと、$\mathbf{lim}_{\varepsilon \to 0}\, \boldsymbol{\sigma_\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma}$ が示せることから、

- 各 $\boldsymbol{u_\varepsilon}$ は一つの極大点 $\boldsymbol{x_\varepsilon}$ を持つ。
- $\mathbf{lim}_{\varepsilon \to 0}\, \mathbf{dist}(\boldsymbol{x_\varepsilon}, \boldsymbol{V})/\varepsilon = \mathbf{lim}_{\varepsilon \to 0}\, \mathbf{dist}(\boldsymbol{\hat{x}_\varepsilon}, \boldsymbol{V}) = \infty$.

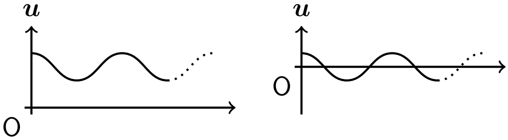
が従う。さらに、$\boldsymbol{x_\varepsilon}$ が乗っている辺を $\boldsymbol{e_\varepsilon}$ と置くと、

- $\boldsymbol{\hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e}_\varepsilon)}}(\cdot + \boldsymbol{\hat{x}_\varepsilon}) \to \boldsymbol{\Phi}$ in $\boldsymbol{C}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{loc}}(\mathbb{R})$.
- $\|\boldsymbol{u_\varepsilon}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\boldsymbol{G} \setminus \boldsymbol{e_\varepsilon})} = \|\boldsymbol{\hat{u}_\varepsilon}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\boldsymbol{G_\varepsilon} \setminus \boldsymbol{\hat{e}_\varepsilon})} \to \mathbf{0}$.

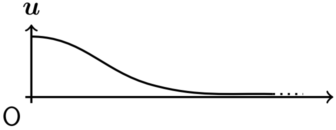
$\hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e}_\varepsilon)}(\cdot + \hat{x}_\varepsilon)$ は、次の方程式の解である。

$$-\Delta u + u = |u|^{p-1}u, \quad \nabla u(0) = 0,\ u(0) > 0.$$

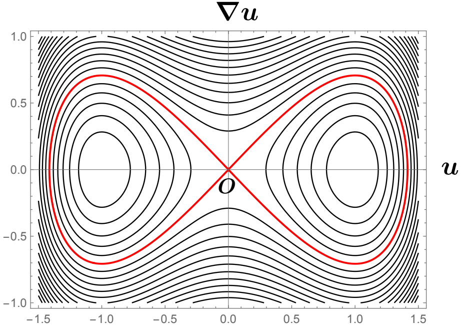
相平面解析をすれば、u は ground state か周期解。



positive (sign-changing) periodic solution



ground state : Φ



ε が十分小なら、$\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon$ は非定数解であって、$\hat{\boldsymbol{e}}$ 上では、$\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(\cdot + \hat{\boldsymbol{x}}_\varepsilon)$ は次のどれかに一致している。

$\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{L}_\varepsilon}$, $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{L}_\varepsilon}$.

ただし、$\boldsymbol{L}_\varepsilon > \mathbf{0}$ は $\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon$ から定まる。また、$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{L}}$, $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{L}}$ は次の一意解。必要なら $\mathbb{R}$ 上に拡張する。偶関数となる。

$$-\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{L}}^{\boldsymbol{p}},\ \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{L}} > \mathbf{0} \text{ on } (\mathbf{0}, \boldsymbol{L}),\ \ \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{L}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0},\ \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{L}) = \mathbf{0}.$$

$$-\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{L}}^{\boldsymbol{p}},\ \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{L}} > \mathbf{0},\ \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{L}} < \mathbf{0} \text{ on } (\mathbf{0}, \boldsymbol{L}),\ \ \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{L}}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{L}) = \mathbf{0}.$$

従って、

- $\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(\cdot + \hat{\boldsymbol{x}}_\varepsilon)$ が $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{L}_\varepsilon}$, $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{L}_\varepsilon}$ のどれに一致するか決める。
- $\boldsymbol{L}_\varepsilon$ を求める。
- $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{L}_\varepsilon}$, $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{L}_\varepsilon}$ のエネルギーを求める。

上記が実行できれば、$\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon^{(\hat{e})}$ のエネルギー $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ が計算できる。

$-\Delta\Phi_L + \Phi_L = \Phi_L^p$, $\Phi_L > 0$ on $(0, L)$, $\nabla\Phi_L(0) = 0$, $\Phi_L(L) = 0$.

Lemma D

$\exists L_0 > 0$, $\exists C > 0$, $\exists d \in (0,1)$,

- $\Phi_L(x) = \Phi(x) + \dfrac{\Phi(L)}{\cosh L}\left(\phi_\infty(x) - \cosh x + \tilde{\phi}_L(x)\right)$ on $(0, L)$.
- $\tilde{\phi}_L \to 0$ in $C^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$.
- $|\phi_\infty(x)|, |\tilde{\phi}_L(x)|, |\nabla\phi_\infty(x)|, |\nabla\tilde{\phi}_L(x)| \le Ce^{dx}$ for $0 \le x \le L$, $L \ge L_0$.
- $I(\Phi_L, (0, L)) = \dfrac{\sigma}{2} + C_0 e^{-2L}(1 + o(1))$ as $L \to \infty$.

ここで、C_0 は Φ から決まる（つまり p のみに依存する）定数。

$\phi_\infty \in C^2(\mathbb{R})$ is a unique solution of
$(-\Delta + 1 - p\Phi^{p-1})\phi_\infty = -p\Phi^{p-1}\cosh x$ on $(0, \infty)$,
$\nabla\phi_\infty(0) = 0$, $\quad |\phi_\infty| << e^{|x|}$ as $|x| \to \infty$.

$-\Delta\Psi_L + \Psi_L = \Psi_L^p$, $\Psi_L > 0$, $\nabla\Psi_L < 0$ on $(0, L)$, $\nabla\Psi_L(0) = \nabla\Psi_L(L) = 0$.

Lemma E

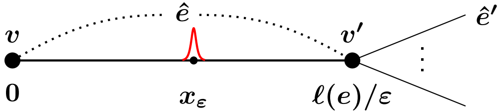
$\exists L_0 > 0$, $\exists C > 0$, $\exists d \in (0, 1)$,

- $\Psi_L(x) = \Phi(x) + \dfrac{\nabla\Phi(L)}{\sinh L}\left(\phi_\infty(x) - \cosh x + \tilde{\psi}_L(x)\right)$ on $(0, L)$.
- $\tilde{\psi}_L \to 0$ in $C^2_{\mathrm{loc}}([0, \infty))$.
- $|\phi_\infty(x)|, |\tilde{\psi}_L(x)|, |\nabla\phi_\infty(x)|, |\nabla\tilde{\psi}_L(x)| \leq Ce^{dx}$ for $0 \leq x \leq L$, $L \geq L_0$.
- $I(\Psi_L, (0, L)) = \dfrac{\sigma}{2} - C_0 e^{-2L}(1 + o(1))$ as $L \to \infty$.

ここで、C_0 は Φ から決まる（つまり p のみに依存する）定数。

Remark

Lemma E における定数や ϕ_∞ は Lemma D と同じもの。



部分列をとって、$e_\varepsilon \equiv e$ は $v \in V_{\mathrm{end}}$ と $v' \in V_{\mathrm{int}}$ をつなぐ辺と仮定する。$\hat{e}$ 上、$\hat{u}_\varepsilon > 0$ で、v で Dirichlet 条件を満たすから、

$$\hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e})}(\cdot + \hat{x}_\varepsilon) \equiv \Phi_{L_\varepsilon},\ 0 \le \ell(e)/\varepsilon \le L_\varepsilon = \hat{x}_\varepsilon.$$

$e' \neq e$ で $e' \succ v'$ となるものをとると、$\hat{u}_\varepsilon$ の極大点は $\hat{x}_\varepsilon \in \hat{e}$ だけなので、$\hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e}')}$ は v' で最大値 $m_\varepsilon := \hat{u}_\varepsilon(v')$ を取る。また、$m_\varepsilon \to 0$ となっている。
$-\Delta \hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e}')} + (1 + o(1))\hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e}')} = 0$ であるから、v' で最大値をとることから、$v' = 0$ となる座標を使うと、$\hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e}')}(x) \sim m_\varepsilon e^{-x}$. つまり、

$$-\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e}')}(v')}{m_\varepsilon} = -\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e}')}(v')}{\hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e}')}(v')} = \frac{\nabla \hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e}')}(0)}{\hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e}')}(0)} = -1 + o(1).$$

v' で Kirchhoff 条件を使うと、$y_\varepsilon := \ell(e)/\varepsilon - \hat{x}_\varepsilon$ として、

$$\frac{\nabla \Phi_{L_\varepsilon}(y_\varepsilon)}{\Phi_{L_\varepsilon}(y_\varepsilon)} = \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e})}(v')}{m_\varepsilon} = -\sum_{e' \succ v', e' \neq e} \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e}')}(v')}{m_\varepsilon} = -(\deg v' - 1) + o(1).$$

左辺を Lemma D を用いて計算する。

$$-\frac{1+e^{-2(L_\varepsilon - y_\varepsilon)}+o(1)}{1-e^{-2(L_\varepsilon - y_\varepsilon)}+o(1)} = \frac{\nabla\Phi_{L_\varepsilon}(y_\varepsilon)}{\Phi_{L_\varepsilon}(y_\varepsilon)} = -(\deg v' - 1) + o(1)$$

となって、

$$L_\varepsilon = \frac{\ell(e)}{2\varepsilon} + \frac{1}{4}\log\frac{\deg v'}{\deg v' - 2} + o(1),$$
$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \sigma + C_0\sqrt{\frac{\deg v' - 2}{\deg v'}}\,e^{-\ell(e)/\varepsilon}(1+o(1)).$$

を得る。
次に、x_ε のある辺 e が、異なる頂点 $v, v' \in V_{\mathrm{int}}$ をつなぐ辺であると仮定すると、同じ議論（+少し考察）により、

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \sigma + C_0\sqrt{\frac{(\deg v - 2)(\deg v' - 2)}{(\deg v)(\deg v')}}\,e^{-\ell(e)/\varepsilon}(1+o(1)).$$

となる。いずれにせよ、次がわかる。

- 辺の長さ $\ell(e)$ が長い方がエネルギーが小さくなる。
- 同じ長さの辺同士を比較すると、辺の端の頂点の deg でエネルギーの大小が決まる。
- エネルギーの値は σ より大きい。

最後に、$e_\varepsilon \equiv e$ が loop で、$e \succ v$, $\deg v = k$ を仮定した場合について述べる。
この場合、考察により、x_ε は e の中心になることが示せる。このことから、先ほどと同様の議論と Kirchhoff 条件を用いると、

$$2\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e})}(v)}{m_\varepsilon} = -\sum_{e' \succ v, e' \neq e} \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e})}(v)}{m_\varepsilon} = -(\deg v - 2) + o(1)$$

となるから、

$$\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e})}(v)}{m_\varepsilon} = -\frac{\deg v - 2}{2} + o(1)$$

を得る。$\deg v = 3$ の場合、$\hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e})}(\cdot + \hat{x}_\varepsilon) \equiv \Phi$ や $\hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e})}(\cdot + \hat{x}_\varepsilon) \equiv \Phi_{L_\varepsilon}$ ではこれは成立しないことがわかる。従って、$\hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e})}(\cdot + \hat{x}_\varepsilon) \equiv \Psi_{L_\varepsilon}$ となっている。あとは、Ψ_L の性質を用いて計算すると、

$$L_\varepsilon = \frac{\ell(e)}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}\log 3 + o(1), \quad J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \sigma - \frac{C_0}{3} e^{-\ell(e)/\varepsilon}(1 + o(1)).$$

となる。エネルギーの第二項の係数が負になっているので、Theorem B のような結論が得られる。

$\deg v \geq 5$ の場合は、$\hat{u}_\varepsilon^{(\hat{e})}(\cdot + \hat{x}_\varepsilon) \equiv \Phi_{L_\varepsilon}$ となり、前の議論と同じように扱えるが、
$\deg v = 4$ の場合は複雑（まだきちんとは出来ていない）。