

2017年6月20日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 1B (MTH.B406) 講義資料 2

お知らせ

- 来週6月27日は休講にさせていただきます。次回は7月4日(火曜日)となります。
- 今回の提出物の締切は6月26日(月曜日)12時30分とさせていただきます。

前回の補足

- 問題 I-1: $X \in O(n, 1)$ の定義は ${}^t X J X = J$ であること。問題の条件から $X J {}^t X = J$ はすぐに出てくるが、これから $X \in O(n, 1)$ を示すにはちょっと手間がかかる(ということを幾何学特論 A1 でやりました)。実際, $X J {}^t X = J$ なら $X^{-1} = J {}^t X J$ 。したがって $J {}^t X J X = \text{id}$, すなわち ${}^t X J X = J$ 。
- 問題 I-4: (2) 答えは $u = \cos \theta \sqrt{u^2 + v^2}$, $v = \sin \theta \sqrt{u^2 + v^2}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ を満たす唯一の θ 。
 $\theta = \tan^{-1}(v/u)$ とはちょっと違うと思う。(逆正接関数の値域は?)

前回までの訂正

- 講義ノート1ページ, 一番下: $\lambda_1^2 v_1^2 + \dots + \lambda_n^2 v_n^2 \leq \lambda^2 \langle v, v \rangle \Rightarrow \lambda_1 v_1^2 + \dots + \lambda_n v_n^2 \leq \lambda \langle v, v \rangle$
- 講義ノート2ページ7行目, 15行目; 7ページ9行目: $U \in \mathbb{R}^m \Rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$
- 講義ノート2ページ, 6行目: $' = \partial / \partial \alpha_j \Rightarrow ' = \partial / \partial u_j$
- 講義ノート3ページ, 下から2行目: 各に対して \Rightarrow 各 t に対して
- 講義ノート4ページ, 1行目: 補題 1.2 の (2) \Rightarrow 補題 1.2 の (1)
- 講義ノート7ページ, (1.13) 式:

$$\frac{dX(t)}{dt} = X(t)\Omega(t, \alpha) \quad \Rightarrow \quad \frac{dX(t)}{dt} = X(t)\Omega(t, \alpha) + B(t, \alpha)$$

- 講義ノート7ページ, 下から7行目, 6行目:
 $\Omega(t - t_0, \alpha) \Rightarrow \Omega(t + t_0, \alpha)$; $B(t - t_0, \alpha) \Rightarrow B(t + t_0, \alpha)$; $X(t - t_0) \Rightarrow X(t + t_0)$
- 講義ノート10ページ, 3行目: $X_0 \in SO(n)$ なら $\Rightarrow \Omega, \Lambda$ が交代行列かつ $X_0 \in SO(n)$ なら
- 講義ノート12ページ, 問題 I-1 の $SO_+(n, 1)$ の定義式の右辺の $\{ \}$ の中: $SO_+(n, 1) \Rightarrow SO(n, 1)$
- 講義ノート12ページ, 問題 I-4 (3), (4): $df = \xi \Rightarrow df = \omega$

授業に関する御意見

- 行列式の微分を初めて知りました。とても重要なのに今まで知らなかったので知れてよかったです。
山田のコメント: 教えないことも多いそうですね。自分も使う場面で初めて知りました(しょうがないので作った)。
- 微分方程式の結果だけ利用してモヤモヤした気持ちが晴れました。
山田のコメント: どこかでちゃんとやらないといけないんだけどね。本当は「モヤモヤ」を覚えていて、自分で埋めていくのがよいと思います。
- 行列の trace はとても simple な計算で成り立っているのに、とても重要で便利なものなのだと理解しました。
山田のコメント: そうなんですよ。ただ「適当に」定義したんじゃないんです。
- 基本的な部分から説明してくださり、ありがとうございました。山田のコメント: どういたしまして。

- これからどう深まっていくか楽しみです。
山田のコメント： 深まりますかね。
- 第2クォーターも頑張ります。よろしくお願いします。/ 2Qもよろしくお願いします。
山田のコメント： こちらこそ。
- この幅で字を書くとか小さくなりますが、先生の目の方は大丈夫ですか？
山田のコメント： まだまだ、って余計なお世話。

質問と回答

質問： 「simply connected, connected」の重ねた条件ですが、単連結であって連結でない場合がイメージできませんでした。そのような例としてどのような例がありますか？

お答え： すなわち「連結性」を単連結性の定義に含めるかどうかです。「すべてのループが一点にホモトピック」という条件だけでは複数の連結成分をもち、すべての連結成分が単連結であるような位相空間は単連結です。

質問： 捩率は曲線のどのような特質を表わしていますか？

お答え： 接触平面 osculating plane から離れていく“はやさ”。梅原・山田「曲線と曲面」の §5。

質問： 一般に \mathbb{R}^n 内の曲線についても基本定理はありますか？

お答え： 曲率 ($n-1$ 個の関数の組) とフルネ枠をうまく定義すれば対応する定理が作れます。たとえば「多様体の微分幾何学」(丹野修吉) の第1章。

質問： Ω が交代行列だから曲線は一意だといえることを曲線の基本定理がいえましたが、もともと Ω が交代行列になるように κ, τ を考え、それを曲率・捩率とよんだのか？ どちらでしょうか。「たまごが先か、にわとりが先か」の話と同じようによくできているなどと思いました。

お答え： たまごにわたりの話と、どの部分が似ているか、もう少し具体的に述べてください。ご質問の部分、多少誤認がありますね。 κ, τ の定義ではなく「正規直交枠」をとっているから Ω が交代行列になる。とくにフルネ枠をとっているから κ, τ がでてくるが他の枠のとおり方をすれば、係数もちがってきますが、それでも Ω に相当する部分は交代行列になります。これは $SO(3)$ のリー環が3次の交代行列がなすベクトル空間になることによります。

質問： 命題 1.7, 系 1.8 などでの Ω や X の滑らかさが C^∞ よりも低いときには、それに応じて解の滑らかさや初期値への依存度も変わっていくのでしょうか。

お答え： はい。証明を見るとすぐわかります。

質問： 一般に $X'(t) = X(t)\Omega(t)$, $X(t_0) = X_0 \Leftrightarrow X(t) = X_0 \exp\left(\int_{t_0}^t \Omega(\tau) d\tau\right)$ は成り立ちますか？

お答え： まず一般に $(\exp A(t))'$ は $A'(t) \exp(A(t))$ と一致しません。これは行列の積が非可換であることによります。

質問： 偏微分方程式系を解く際、常微分のような決まった解き方はあるのでしょうか。勉強不足なもので...

お答え： 常微分方程式の「きまった解き方」ってなんでしょう。そういうものはないと思うのですが。

質問： 幾何学特論 A1 講義ノート p27 の補題 3.6 は「あたりまえ」のように見えてしまい、証明されていないけれどもあたりまえにそう理解してしまいそうです。補題 3.6 は「一見あたりまえ」に思えるけれど数学的には証明してからあたりまえとするためにあるのでしょうか？ それともはめこみの概念がもっと一般的に使われた時のために trivial な参考例として挙がっているのでしょうか？

お答え： あたりまえです。なのでほとんど一言で証明がすんでいる。数学の文脈で「あたりまえ」というのは「理由を一言で説明できる」ことです。「あたりまえに思える」というフレーズはあまり使わない方がよいかと思います。

質問： 色々な所で各種の可積分条件が示されますが、それらには、何か統一的な理論があるのでしょうか。例えば、「概複素構造の可積分条件」も「線形偏微分方程式の可積分条件」も“フロベニウスの定理”が基礎にあるように思えるのですが、多様体論の中で教えられる形と随分違った形で出て来るので、このあたりのところが良くわかりません。これらがわかるような文献等を教えて頂ければありがたいのですが。

お答え： 基本的には「フロベニウスの定理」。具体的に現れる形を包含した解説はあまりないかも知れません(山田が不勉強なので)。さまざまな場面で現れた「可積分条件」を自分の知っている形に書きなおしてみるとわかってくると思います。

質問： 1-4 (2) の詳しい解説が聞きたいです。お答え： どの程度詳しく？

質問： $X_0 \in SO_+(n, 1) \Rightarrow {}^t X_0 \in SO_+(n, 1)$ は出るのでしょうか？

お答え： 幾何学特論 A1 の第3回目くらいでやったように思います。 $X_0 \in O(n, 1)$ ならば $J^t X_0 J = X_0^{-1}$ であることを用いる。