

VI. 球面・双曲空間

リーマン多様体 一般に, 可微分多様体 M の各点 P における接空間 $T_P M$ に正定値な内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ が与えられており, これが次の意味で滑らかであるとき, 組 $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ をリーマン多様体とよぶ¹⁾:

M 上の任意のなめらかなベクトル場 X, Y に対して

$$M \ni P \mapsto \langle X_P, Y_P \rangle_P \in \mathbb{R}$$

が滑らかな関数となる. ただし X_P, Y_P はそれぞれベクトル場 X, Y の P における値 ($T_P M$ の元) を表している. この関数を単に $\langle X, Y \rangle$ と書くことにする.

ここに現れる内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ をリーマン多様体のリーマン計量とよぶ.

第 V 回に見たように, リーマン多様体上には共変微分²⁾ や断面曲率が定義される.

各点における接空間に正定値とは限らない非退化内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が与えられた多様体を擬リーマン多様体, とくに内積の符号が $(*, 1)$ のときをローレンツ多様体とよぶ³⁾.

この講義では, リーマン多様体や擬リーマン多様体の一般論は扱わず, 特別なリーマン多様体の具体例を挙げる. リーマン多様体の一般論 (リーマン幾何学) は第 3, 4 クォーターの幾何学特論 C1/D1 で扱う.

ユークリッド空間 ユークリッド空間 \mathbb{R}^n は, 各点 P における接空間 $T_P \mathbb{R}^n$ を \mathbb{R}^n と同一視してユークリッド内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を考えることで, リーマン多様体となる. とくに, \mathbb{R}^n の標準的な座標 (x^1, \dots, x^n) を考えると, この

^{*}) 2017 年 5 月 16 日 (2017 年 5 月 23 日訂正)

¹⁾ リーマン多様体: a Riemannian manifold. リーマン計量: a Riemannian metric

²⁾ リーマン接続 the Riemannian connection, レヴィ・チヴィタ接続 the Levi-Civita connection とよばれる.

³⁾ 擬リーマン多様体: a pseudo-Riemannian manifold; ローレンツ多様体: a Lorentzian manifold.

座標から定まる基底ベクトル場

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$$

は正規直交系となる. 言い換えれば

$$g_{ij} := \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases},$$

すなわち

$$(6.1) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2$$

と表すことができる. とくにリーマン計量の成分 g_{ij} は座標 x^j の値によらない定数だから, (5.12) のクリストッフェル Γ_{ij}^k はすべて 0 になる. このことから, 断面曲率 $K(\Pi_P)$ が, 接空間の 2 次元部分空間 Π_P によらず恒等的に 0 となることがわかる.

一般に, 次のことが知られている:

事実 6.1. リーマン多様体 $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の点 P の近傍で, リーマン計量が (6.1) の形になるような局所座標系 (x^1, \dots, x^n) が存在するための必要十分条件は, P の近傍で断面曲率が恒等的に 0 となることである.

証明はフロベニウスの定理の簡単な応用問題である. 第 2 クォーターの幾何学特論 B1 で少しコメントする.

球面 ユークリッド空間 \mathbb{R}^{n+1} の部分集合

$$(6.2) \quad S^n(k) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{k} \right\}$$

を考える. ただし k は正の定数である. 第 III 回の記号 (式 (3.3) 参照) を用いれば, $S^n(k) = Q_{1/k}$ である. とくに $1/k > 0$ としているので, $S^n(k)$ は \mathbb{R}^{n+1} のなめらかな超曲面を与える. とくに誘導計量を考えれば $S^n(k)$ はリーマン多様体と見なすことができる.

点 x における単位法線ベクトルは $\nu\sqrt{k}x$ となるので, ワインガルテン作用素 W は

$$W(v) = -\sqrt{k}v \quad (v \in T_x S^n(k) = x^\perp)$$

与えられる.

したがって, 第二基本形式の定義 (第 V 回) と「驚異の定理」の高次元版 (定理 5.10) から,

定理 6.2. 正の定数 k に対して (6.2) で定義される $S^n(k)$ は \mathbb{R}^{n+1} のコンパクトな部分多様体である. さらに, 任意の点 $x \in S^n(k)$ における $T_x S^n(k)$ の 2 次元部分空間 Π_x に関する断面曲率は

$$K(\Pi_x) = k$$

となる.

この $S^n(k)$ を, 曲率 k の n 次元球面, とくに $S^n := S^n(1)$ を n 次元単位球面という⁴⁾.

双曲空間 ローレンツ・ミンコフスキー空間 \mathbb{R}_1^{n+1} の部分集合

$$(6.3) \quad H^n(-k) := \left\{ x = {}^t(x^0, x^1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -\frac{1}{k}, x^0 > 0 \right\}$$

を考える. ただし k は正の定数である. 第 III 回の記号 (式 (3.3) 参照) を用いれば, $H^n(-k)$ は $Q_{-1/k}$ のうち x^0 座標が正の部分である⁵⁾. とくに $1/k > 0$ としているので, $H^n(-k)$ は \mathbb{R}_1^{n+1} のなめらかな超曲面を与える. とくに問題 III-1 で見たように, 誘導計量は正定値なので $H^n(-k)$ はリーマン多様体と見なすことができる.

点 x における単位法線ベクトルは $\nu = \sqrt{k}x$ となるので, ワインガルテン作用素 W は

$$W(v) = -\sqrt{k}v \quad (v \in T_x S^n(k) = x^\perp)$$

⁴⁾ 曲率 k の n 次元球面: the n -sphere of (sectional) curvature k ; n 次元単位球面: the unit n -sphere.

⁵⁾ 二葉双曲面 $Q^{-1/\sqrt{k}}$ の点 (x^0, \dots, x^n) は $|x^0| \geq 1/\sqrt{k}$ を満たすので, $x^0 > 0$ の部分と $x^0 < 0$ の部分に別れる. これらの部分はそれぞれ連結である.

与えられる. したがって, 第二基本形式の定義 (第 V 回) と「驚異の定理」の高次元版 (定理 5.11) から,

定理 6.3. 正の定数 k に対して (6.3) で定義される $H^n(-k)$ は \mathbb{R}_1^{n+1} の連結かつ非コンパクトな部分多様体である. さらに, 任意の点 $x \in H^n(-k)$ における $T_x H^n(-k)$ の 2 次元部分空間 Π_x に関する断面曲率は

$$K(\Pi_x) = -k$$

となる.

この $H^n(-k)$ を, 曲率 $-k$ の n 次元双曲空間, とくに $H^n := H^n(-1)$ を n 次元双曲空間という⁶⁾.

球面と双曲空間は断面曲率一定なリーマン多様体である. 事実 6.1 に対応して次が成り立つ.

事実 6.4. 正の実数 k に対して, 断面曲率が一定値 k ($-k$) を持つ n 次元リーマン多様体 M は, 局所的には $S^n(k)$ ($H^n(-k)$) に等長的である. すなわち, M の任意の点 P に対して P の近傍 U と, リーマン計量をたもつ単射 $f: U \rightarrow S^n(k)$ ($f: U \rightarrow H^n(-k)$) が存在する.

事実 6.1 と同様に事実 6.4 もフロベニウスの定理の応用として示すことができる (幾何学特論 B1).

測地線と完備性 (擬) ユークリッド空間 \mathbb{R}_t^{n+1} の非退化な超曲面 M の単位法線ベクトルを ν とすると,

$$\mathbb{R}_t^{n+1} = T_P M \oplus \mathbb{R}\nu_P$$

なる直交直和分解が存在する. すなわち, 任意の $v \in \mathbb{R}_t^{n+1} = T_P \mathbb{R}_t^{n+1}$ は

$$v = [v]^T + [v]^N \quad [v]^T \in T_P M, \quad [v]^N \in \mathbb{R}\nu_P$$

と一意的に分解できる. とくに, 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いれば

$$(6.4) \quad [v]^N = \varepsilon \langle v, \nu \rangle \nu, \quad [v]^T = v - [v]^N = v - \varepsilon \langle v, \nu \rangle \nu$$

⁶⁾ 曲率 k の n 次元双曲空間: the n dimensional hyperbolic space of (sectional) curvature k , the hyperbolic n -space of curvature k ; n 次元双曲空間: the hyperbolic n -space.

で与えられる．ここで $\varepsilon = \langle \nu, \nu \rangle = \pm 1$ である．

超曲面 $M \subset \mathbb{R}_t^{n+1}$ 上のパラメータ付けられた C^∞ -曲線

$$\gamma: \mathbb{R} \supset I \ni t \mapsto \gamma(t) \in M \subset \mathbb{R}_t^{n+1}$$

を考える．ただし I は数直線上の区間である．各 $t \in I$ に対して

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) \in T_{\gamma(t)}M$$

を曲線 γ の t における速度ベクトル⁷⁾ という．とくに，至るところで速度ベクトルが零ベクトルにならない曲線を正則曲線⁸⁾ という．

加速度ベクトル $\ddot{\gamma}(t)$ は超曲面の接ベクトルになるとは限らない．そこで，超曲面に接する部分を

$$(6.5) \quad \frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) := [\ddot{\gamma}(t)]^T \in T_{\gamma(t)}M$$

と書き， $\dot{\gamma}$ の（曲線の方向への）共変微分という．

補題 6.5. 超曲面⁹⁾ 上の曲線 γ に対して

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 2 \langle \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$$

が成り立つ．

証明．速度ベクトル $\dot{\gamma}(t)$ は $T_{\gamma(t)}M$ に含まれるから，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle &= 2 \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 2 \langle [\ddot{\gamma}(t)]^T + [\ddot{\gamma}(t)]^N, \dot{\gamma}(t) \rangle \\ &= 2 \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 2 \langle [\ddot{\gamma}(t)]^T, \dot{\gamma}(t) \rangle = 2 \langle \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle. \end{aligned}$$

□

第 V 回で述べた共変微分 ∇ は M 上ベクトル場の微分であったが，ここで微分は曲線上で定義されたベクトルの微分となっている．超曲面 M の局所座標系 (u^1, \dots, u^n) を用いて M を $f(u^1, \dots, u^n)$ とパラメータ表示して，

$$\gamma(t) = f(u^1(t), \dots, u^n(t))$$

⁷⁾速度ベクトル：the velocity vector；加速度ベクトル：the acceleration vector.

⁸⁾正則曲線：a regular curve.

⁹⁾ここでは（擬）ユークリッド空間の超曲面に対して証明するが，一般にリーマン多様体，擬リーマン多様体でも補題 6.5 は成り立つ．

と表すと，

$$(6.6) \quad \dot{\gamma} = \sum_{j=1}^n \frac{dw^j}{dt} \frac{\partial f}{\partial w^j}$$

$$(6.7) \quad \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d^2 w^j}{dt^2} + \sum_{k,l=1}^n \Gamma_{kl}^j \frac{dw^k}{dt} \frac{dw^l}{dt} \right) \frac{\partial f}{\partial w^j}$$

となる．ここで Γ_{kl}^j は式 (5.12) で与えたクリストッフエル記号の $\gamma(t)$ における値を表す．このように $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ は，曲線の局所座標とクリストッフエル記号のみを用いて表示できるので，超曲面の内的概念であり，リーマン多様体上の概念と見なすことができる．

定義 6.6. リーマン多様体上の曲線 γ が測地線であるとは¹⁰⁾， $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ が恒等的に零ベクトルとなることである．また， $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ が γ と一次従属であるとき， γ は準測地線であるという．

定義 6.6 は擬リーマン多様体に対しても有効だが，ここでは深入りしない．測地線概念は曲線のパラメータのとり方に依存するが，準測地線であることは，パラメータのとり方によらない．

補題 6.7. リーマン多様体 M 上の測地線 $\gamma(t)$ に対して

$$\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$$

は t によらず一定である．

証明．補題 6.5 から，測地線なら $(d/dt) \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$. □

命題 6.8. リーマン多様体上の正則曲線 γ が準測地線であるとき， γ のパラメータを適切にとりなおして測地線にすることができる．

証明．曲線 γ の定義域 I 上に t_0 を一つとって固定し，

$$(6.8) \quad s(t) := \int_{t_0}^t \langle \dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau) \rangle^{1/2} d\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$$

¹⁰⁾測地線：a geodesic；準測地線：a pregeodesic.

とおくと, $\dot{\gamma} \neq 0$ (正則性) と計量が正定値であることから

$$ds/dt = \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{1/2} > 0.$$

したがって $s: I \rightarrow s(I)$ は微分同相写像を与えている. そこで, 逆関数 $t = t(s)$ を考え $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ とおくと

$$\tilde{\gamma}'(s) := \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{ds/dt} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\dot{\gamma}}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{1/2}}$$

である. このことから $\tilde{\gamma}$ の速度ベクトル $\tilde{\gamma}'(s)$ の大きさは 1 であることがわかる¹¹⁾. さらに微分して¹²⁾,

$$\begin{aligned} \nabla_{\tilde{\gamma}'} \tilde{\gamma}' &= \left[\frac{d}{ds} \tilde{\gamma}' \right]^T = \left[\frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}' \right]^T = \frac{dt}{ds} \left[\frac{d}{dt} \frac{\dot{\gamma}}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{1/2}} \right]^T \\ &= \frac{dt}{ds} \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{1/2}} - \frac{\langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma}}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{3/2}} \right]^T = \frac{dt}{ds} \left(\frac{[\ddot{\gamma}]^T}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{1/2}} - \frac{\langle [\ddot{\gamma}]^T, \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma}}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{3/2}} \right) \\ &= \frac{dt}{ds} \left(\frac{\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{1/2}} - \frac{\langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma}}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

ここでもとの曲線 γ は準測地線と仮定していたので $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \sigma(t)\dot{\gamma}$ となる関数 $\sigma(t)$ が存在する. したがって,

$$\nabla_{\tilde{\gamma}'} \tilde{\gamma}' = \frac{dt}{ds} \left(\frac{\sigma \dot{\gamma}}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{1/2}} - \frac{\langle \sigma \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma}}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{3/2}} \right) = 0$$

となり, $\tilde{\gamma}$ は測地線になることがわかる. \square

閉区間 $I := [a, b]$ で定義されたリーマン多様体 $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 上の曲線 $\gamma(t)$ の長さ¹³⁾ とは

$$(6.9) \quad \mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle^{1/2} dt$$

のことである. とくに M 上の 2 点 P, Q を結ぶ区分的になめらかな曲線全体を $\mathcal{C}_{P,Q}$ と書くとき

$$(6.10) \quad d(P, Q) := \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_{P,Q}} \mathcal{L}(\gamma)$$

¹¹⁾速度ベクトルが単位ベクトルとなるような曲線のパラメータ s を弧長パラメータという.

¹²⁾本当はきちんと「内的」に計算すべきだが, 簡単のため, 超曲面における計算をした.

¹³⁾長さ: length.

を P, Q の距離という.

事実 6.9. 連結なリーマン多様体 M 上に (6.10) により $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ を定義すると

- d は M 上の距離関数を与える.
- 距離 d から定まる M の位相は, M に多様体として与えられた位相と一致する.
- 曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ の長さ $\mathcal{L}(\gamma)$ が $d(\gamma(a), \gamma(b))$ と一致するならば, γ のパラメータを適当に変更すれば測地線となる.

常微分方程式の一般論から, 次のことがわかる:

定理 6.10. リーマン多様体 M 上の点 P とベクトル $v \in T_P M$ に対して, 正の実数 ε と測地線 $\gamma_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ で

$$\gamma_v(0) = P, \quad \dot{\gamma}_v(0) = v$$

を満たすものがただひとつ存在する.

証明. 点 P のまわりの局所座標 (u^1, \dots, u^n) をとる. この座標系で表示された曲線 $\gamma(t) = (u^1(t), \dots, u^n(t))$ が測地線であるための必要十分条件は, (6.7) より

$$(6.11) \quad \frac{d^2 u^j}{dt^2} + \sum_{k,l=1}^n \Gamma_{kl}^j \frac{du^k}{dt} \frac{du^l}{dt} = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

が成り立つことである. さらに点 P の座標を (u_0^1, \dots, u_0^n) として, ベクトル¹⁴⁾

$$v = v^1 \left(\frac{\partial}{\partial u^1} \right)_P + \dots + v^n \left(\frac{\partial}{\partial u^n} \right)_P$$

とすると, 条件 $\gamma(0) = P, \dot{\gamma}(0) = v$ は

$$(6.12) \quad w^j(0) = u_0^j, \quad \frac{dw^j}{dt}(0) = v^j$$

と同値. クリストッフエル記号 Γ_{ij}^k は (u^1, \dots, u^n) の関数だから, 式 (6.11) は n 個の 1 変数関数 $w^j(t)$ に関する 2 階の正規型常微分方程式なので, $t = 0$ で初期条件 (6.12) を満たす解がただひとつ存在する (常微分方程式の基本定理). \square

¹⁴⁾ $(\partial/\partial u^j)_P$ は局所座標系から誘導される $T_P M$ の標準基底を表す. M が \mathbb{R}_t^{n+1} の超曲面である場合は, はめ込み $f: M \rightarrow \mathbb{R}_t^{n+1}$ の微分 $\partial f/\partial u^j$ と思ってよい.

定義 6.11. リーマン多様体 $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ が完備¹⁵⁾ であるとは, 任意の測地線が区間 $(-\infty, +\infty)$ で定義されていることである.

リーマン多様体の完備性は多様体のさまざまな性質と関係がある:

事実 6.12 (ホップ・リノーの定理). 連結なリーマン多様体 $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ に対して次は同値である.

- $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は定義 6.11 の意味で完備である.
- M 上のある点 P を出発する全ての測地線が $(-\infty, \infty)$ で定義される.
- 式 (6.10) で定義された距離関数 d が完備な距離を与える.
- M 上の任意の発散する道¹⁶⁾ の長さが無限大.
- M の距離 d に関する任意の有界集合は相対コンパクト.

さらに, $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ が完備ならば, M 上の 2 点 P, Q を結ぶ測地線で, 長さが $d(P, Q)$ となるものが存在する.

例 6.13 (ユークリッド空間における測地線). ユークリッド空間 \mathbb{R}^n をリーマン多様体とみなし, 標準座標系を局所座標ととると, クリストッフェル記号はすべて 0 になる. したがって, 測地線の方程式 (6.11) は $d^2 u^j / dt = 0$ ($j = 1, \dots, n$) となり $u^j(t)$ は t に関する一次式, すなわち, 測地線は

$$\gamma(t) = tv + p$$

の形をしている. すなわち, 速度 v が一定であるような直線である. この式は $t \in \mathbb{R}$ で意味をもつから, ユークリッド空間は完備である. とくに 2 点を結ぶ線分の長さが距離を与えている. \diamond

例 6.14 (球面の測地線). 簡単のため単位球面 $S^n = S^n(1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を考えよう. 点 P を, 球面の中心 (原点) からの位置ベクトル p と同一視する. ベクトル $v \in T_P S^n$ は p に直交するベクトルである. とくに v を単位ベクトル ($\langle v, v \rangle = 1$) にとると, p と v で正規直交系をなす. そこで,

$$\gamma(t) = (\cos t)p + (\sin t)v$$

¹⁵⁾完備: complete.

¹⁶⁾曲線 $\gamma: [0, \infty) \rightarrow M$ が発散する道 divergent path であるとは, M の任意のコンパクト集合 K に対して, ある数 t_K が存在して $\gamma([t_K, \infty))$ が $M \setminus K$ に含まれることである.

とおくと, 次のことが成り立つ:

- $\langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 1$, すなわち $\gamma(t)$ は S^n 上の曲線である.
- $\ddot{\gamma}(t) = -\gamma(t)$, すなわち $\ddot{\gamma}(t)$ は点 $\gamma(t)$ で球面の接空間に直交する.
- $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$.
- γ の像 $\gamma(\mathbb{R})$ は球面 S^n と, 原点をとおり $\{p, v\}$ ではられる平面との共通部分である.

このような, 球面と, その中心を通る平面との共通部分として得られた円を大円という¹⁷⁾. 一般の半径の球面の, 単位速さとは限らない測地線も具体的に表示でき (問題 VI-1) その定義域は \mathbb{R} 全体なので, $S^n(k)$ は完備である¹⁸⁾. \diamond

例 6.15 (双曲空間の測地線). 簡単のため $H^n = H^n(-1) \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ を考えよう. 点 P を位置ベクトル p と同一視する. ベクトル $v \in T_P H^n$ は p に直交するベクトル (空間的ベクトル) である. とくに v を単位ベクトル ($\langle v, v \rangle = 1$) にとると, p と v で正規直交系をなす. そこで,

$$\gamma(t) = (\cosh t)p + (\sinh t)v$$

とおくと, 次のことが成り立つ:

- $\langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = -1$, すなわち $\gamma(t)$ は H^n 上の曲線である.
- $\ddot{\gamma}(t) = \gamma(t)$, すなわち $\ddot{\gamma}(t)$ は点 $\gamma(t)$ で双曲空間の接空間に直交する.
- $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$.
- γ の像 $\gamma(\mathbb{R})$ は双曲空間 H^n と, 原点をとおり $\{p, v\}$ ではられる平面との共通部分である. \diamond

定理 6.16. 双曲空間 $H^n(-k)$ は完備である.

¹⁷⁾大円: a great circle.

¹⁸⁾実は S^n はコンパクトなので, 事実 6.12 から完備性は自動的に従う.

空間形

定義 6.17. 断面曲率が一定で完備なリーマン多様体のことを空間形またはリーマン空間形という¹⁹⁾.

ユークリッド空間 \mathbb{R}^n , 球面 $S^n(k)$, 双曲空間 $H^n(-k)$ はいずれも空間形である.

事実 6.18. 連結かつ単連結な空間形は \mathbb{R}^n , $S^n(k)$, $H^n(-k)$ のいずれかである.

問 題 VI

VI-1 球面 $S^n(k)$ の点 p における速度が $v \in T_p S^n(k)$ となる測地線を具体的に表示しなさい.

VI-2 例 6.15 を確かめなさい.

VI-3 ● 球面 $S^n = S^n(k)$ の 2 点 P, Q の位置ベクトルをそれぞれ p, q としたとき, P, Q の距離は

$$d(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{k}} \arccos k \langle p, q \rangle$$

であることを示しなさい.

- 双曲空間 $H^n(-k)$ の 2 点間の距離を求める公式を作りなさい.
- わが町大岡山 (北緯 35.607472 度, 東経 139.685610 度) と華の都パリ (北緯 48.858582 度, 東経 2.294438 度) の地球 (球面とみなす) 上での距離を求めなさい.

¹⁹⁾空間形 : a space form ; リーマン空間形 : a Riemannian space form.