

線形代数学第二B

講義ノート

東京工業大学 全学科目
2012年度後期

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

1 ベクトル空間

1.1 ベクトル空間

定義 1.1 (テキスト 115 ページ). 集合 V がベクトル空間 または線形空間 a vector space であるとは,

- V の各要素 v, w に対して V の要素 $v + w$ を対応させる規則 (加法)
- V の各要素 v と実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して V の要素 λv を対応させる規則 (スカラー倍)

が定められていて, それらが次の性質を満たすことである:

- (1) 任意の $u, v, w \in V$ に対して $(u + v) + w = u + (v + w)$ が成り立つ.
- (2) 任意の $u, v \in V$ に対して $u + v = v + u$ が成り立つ.
- (3) 次を満たす V の要素 o が存在する: 任意の $v \in V$ に対して $v + o = v$. o を V の零ベクトルという.
- (4) 任意の $v \in V$ に対して $v + w = o$ となる $w \in V$ が存在する. (この w を $-v$ と書き v の逆ベクトルという.)
- (5) 任意の $u, v \in V$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.
- (6) 任意の $u \in V$ と $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.
- (7) 任意の $u \in V$ と $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.
- (8) 任意の $u \in V$ に対して $1u = u$.

注意 1.2. • すなわち, ベクトル空間とは「加法とスカラー倍が定義されて, 然るべき性質を満たす」ような集合のことである.

- ここでは「スカラー」を実数としたが, \mathbb{R} の代わりに \mathbb{C} (複素数全体の集合) の要素をスカラーとみなすこともある. 何をスカラーとしているかを明確にしたい場合: 定義 1.1 の性質をもつ V を「 \mathbb{R} 上のベクトル空間」 a vector space over \mathbb{R} , または「実ベクトル空間」定義 1.1 の \mathbb{R} を \mathbb{C} に置き換えた性質をもつ V を「 \mathbb{C} 上のベクトル空間」 a vector space over \mathbb{C} , 「複素ベクトル空間」という.
- さらに, スカラーの範囲は一般化することができる. すなわち「加減乗除ができるような集合」であれば, それをスカラーとするベクトル空間を考えることができる. この「加減乗除ができるような集合」のことを体 (たい) a field という.

1.2 ベクトル空間の例

例 1.3 (数ベクトル空間). 正の整数 n に対して $\mathbb{R}^n := \{ {}^t[x_1, \dots, x_n] \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$ とする.

$\mathbf{x} = {}^t[x_1, \dots, x_n], \mathbf{y} = {}^t[y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := {}^t[x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n], \quad \lambda \mathbf{x} := {}^t[\lambda x_1, \dots, \lambda x_n]$$

と定める. さらに

$$\mathbf{o} := {}^t[0, \dots, 0], \quad -\mathbf{x} := (-1)\mathbf{x} = {}^t[-x_1, \dots, -x_n]$$

と定めると、これらは定義 1.1 の性質を満たす。このようにして定まるベクトル空間 \mathbb{R}^n を (実係数の) n 次元ベクトル空間という。

例 1.4. 正の整数 m, n に対して、実数を成分とする $m \times n$ 型行列全体の集合を $M(m, n)$ と表す。 $M(m, n)$ に適切に加法とスカラー倍を定義すれば、これはベクトル空間となる。

例 1.5. 実数を成分とする (無限) 数列全体の集合を S と書くことにする。 S の要素とは、数列

$$\{a_j\}_{j=0}^{\infty} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} \quad (a_j \in \mathbb{R})$$

のことである。 $\mathbf{x} = \{x_j\}_{j=0}^{\infty} = \{x_0, x_1, \dots\}$, $\mathbf{y} = \{y_j\}_{j=0}^{\infty} = \{y_0, y_1, \dots\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := \{x_j + y_j\}_{j=0}^{\infty} = \{x_0 + y_0, x_1 + y_1, \dots\}, \quad \lambda \mathbf{x} := \{\lambda x_j\}_{j=0}^{\infty} = \{\lambda x_0, \lambda x_1, \dots\}$$

と定めることで S はベクトル空間となる。とくに零ベクトルは

$$\mathbf{o} = \{0\}_{j=0}^{\infty} = \{0, 0, \dots\}$$

である。

例 1.6. 一般に、集合 X, Y が与えられたとき^{*1}, X の各要素 x に対して Y の要素 $f(x)$ を対応させる規則 f を X から Y への写像 a map from X to Y という。“ f は X から Y への写像である”, “ f は $x \in X$ を $f(x) \in Y$ に対応させる” ということをそれぞれ

$$f: X \rightarrow Y, \quad f: X \ni x \mapsto f(x) \in Y$$

と書く^{*2}。とくに Y が \mathbb{R} (または \mathbb{C}) のときには、 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ($f: X \rightarrow \mathbb{C}$) を “ X 上の実数値 (複素数値) 関数” a real-valued (complex-valued) function on X という。

ここでは、以下 X 上の実数値関数全体の集合を $\mathcal{F}(X)$ と書くことにする。 $\mathcal{F}(X)$ の一つの要素 f は「 X の各要素に実数 $f(x)$ を対応させる対応の規則」だから、 $f \in \mathcal{F}(X)$ を指定するには、各 $x \in X$ に対して $f(x) \in \mathbb{R}$ を指定してやればよい。たとえば、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f: \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$$

と定めると、 $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ となる。

ふたつの関数 $f, g \in \mathcal{F}(X)$ が等しいとは、すべての $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ が成り立つ、すなわち $f(x) = g(x)$ が x の恒等式となることである。

空でない集合 X をひとつとり、 $f, g \in \mathcal{F}(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$f + g: X \ni x \mapsto (f + g)(x) := f(x) + g(x) \in \mathbb{R}, \quad \lambda f: X \ni x \mapsto (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \in \mathbb{R}$$

とすると $f + g \in \mathcal{F}(X)$, $\lambda f \in \mathcal{F}(X)$ となる。これを加法とスカラー倍として $\mathcal{F}(X)$ はベクトル空間となることは容易にたしかめられる。とくに零ベクトルは

$$\mathbf{o}(x) = 0 \quad (x \in X)$$

すなわち、恒等的に 0 となる関数 \mathbf{o} である。

注意 1.7.

- 正の整数 n に対して $N_n := \{1, 2, \dots, n\}$ とすると例 1.3 の \mathbb{R}^n は $\mathcal{F}(N_n)$ と同一視できる。
- $\bar{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \dots\}$ を負でない整数全体の集合とすると、例 1.5 の S は $\mathcal{F}(\bar{\mathbb{N}})$ と同一視できる。

^{*1} 簡単のため空集合でないとする。

^{*2} 矢印の形に注意

1.3 部分空間

一般に、ベクトル空間 V の空でない部分集合 $W \subset V$ が

$$(1.1) \quad \text{任意の } v, w \in W, \lambda \in \mathbb{R} \text{ に対して } \quad v + w \in W, \quad \lambda v \in W$$

を満たすならば、 V の加法およびスカラー倍を W 上に限ることで、 W はベクトル空間になる。

実際、定義 1.1 の (1), (2), (5)–(8) はもともと V で成り立っているのだから W 上でも成り立つ。また、 V の零ベクトル o は、任意の $v \in W$ に対して $o = 0v$ を満たすので、 $o \in W$ となり、これを用いれば (3) が成り立つことがわかる。さらに $v \in W$ に対して $-v = (-1)v \in W$ とすれば (4) が成り立つ。

そこで (1.1) を満たす V の部分集合 W を V の部分空間 subspace, 部分ベクトル空間, 線形部分空間 linear subspace とよぶ。

例 1.8 (生成する部分空間 (復習)). ベクトル空間 V の要素 e_1, \dots, e_k の 1 次結合全体の集合

$$\langle e_1, \dots, e_k \rangle := \{ \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \}$$

は V の部分空間となる。これを $\{e_1, \dots, e_k\}$ が生成する部分空間という*3

例 1.9 (連立 1 次方程式の解空間 (復習)). 行列 $A \in M(m, n)$ に対して、同次連立 1 次方程式 $Ax = o$ の解

$$V_A := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = o \}$$

は \mathbb{R}^n の部分空間である。

例 1.10. 各項が実数であるような数列全体のなすベクトル空間 S (例 1.5 参照) に対して

$$S_c := \left\{ \{a_j\}_{j=0}^{\infty} \in S \mid \{a_j\} \text{ は収束 converge する} \right\}$$

とおくと S_c は S の部分空間である。

実際 $a = \{a_j\}, b = \{b_j\} \in S_c$ がそれぞれ α, β に収束するならば、 $a + b = \{a_j + b_j\}, \lambda a = \{\lambda a_j\}$ はそれぞれ $\alpha + \beta, \lambda \alpha$ に収束する (ということを解析学で学んだ)。したがって $a + b \in S_c, \lambda a \in S_c$ 。

例 1.11. 数直線の区間 I に対して、例 1.6 で定めた $\mathcal{F}(I)$ 、すなわち I 上で定義された実数値関数全体のなすベクトル空間を考える。このとき

$$\mathcal{C}(I) := \left\{ f \in \mathcal{F}(I) \mid f \text{ は } I \text{ で連続} \right\}$$

は $\mathcal{F}(I)$ の部分空間である。

このことは、解析学で学ぶ「連続関数の和は連続」、「連続関数のスカラー倍は連続」という事実そのものである。

同様に、正の整数 r に対して

$$\mathcal{C}^r(I) := \{ f \in \mathcal{F}(I) \mid f \text{ は } I \text{ で } C^r\text{-級} \}$$

は $\mathcal{F}(I)$ の部分空間である*4

*3 前期はとくに $V = \mathbb{R}^n$ の場合を考えたが、一般のベクトル空間でも同じことが成り立つ。

*4 関数 f が C^r -級である、ということの定義を思い出さない。

例 1.12. 正の整数 k に対して

$$\mathcal{P}^k := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f(x) \text{ は高々 } k \text{ 次の多項式 } x\}$$

とする. すなわち \mathcal{P}^k は高々 (たかだか) k 次の多項式全体の集合 (the set of polynomials of degree at most k) である. このとき \mathcal{P}^k は $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ の部分空間である.

例 1.13. 実数の定数 α, β に対して微分方程式

$$(1.2) \quad f''(x) + \alpha f'(x) + \beta f(x) = 0$$

を考える. このとき

$$(1.3) \quad V_{\alpha, \beta} := \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ は 2 回微分可能で (1.2) を満たす} \right\}$$

は $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ の部分空間である.

1.4 1 次独立性

ベクトル空間 V の要素 e_1, \dots, e_n が 1 次独立 linearly independent であるとは,

スカラー $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \mathbf{o}$ を満たすならば $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ が成り立つ

ことである. また e_1, \dots, e_n が 1 次独立でないとき 1 次従属 linearly dependent という. ベクトル e_1, \dots, e_n が 1 次従属であるための必要十分条件は,

$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \mathbf{o}$ を満たす $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ で $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ となるものが存在する

ことである.

例 1.14. \mathbb{R}^n の k 個の要素 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ が 1 次独立であるための必要十分条件は, $n \times k$ -行列 $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k]$ の階数が k となることである.

行列 A を, 行基本変形によって階段行列 B に変形できたとすると, n 次の正則行列 C を用いて $A = CB$ と書ける. ここで

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{o} \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow B \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

であるが, B は $n \times k$ の階段行列でその階数が k なので (1) $k \leq n$, (2) B の上から k 行は k 次の単位行列となる. したがって, $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{o}$ であるための必要十分条件は $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

例 1.15. 負でない整数 k に対して, 例 1.5 の S の要素 \mathbf{a}_k を

$$\mathbf{a}_k := [\text{第 } k \text{ 項が } 1 \text{ でそれ以外の項は } 0 \text{ であるような数列}] = \{\delta_{jk}\}_{j=0}^{\infty}$$

と定める. すると, 正の整数 n に対して $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$ は 1 次独立である.

実際

$$\lambda_0 \mathbf{a}_0 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots\}$$

であるが, 右辺の数列が \mathbf{o} であるための必要十分条件は $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

例 1.16. 例 1.6 の $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ の要素 f_0, f_1, \dots を

$$f_0(x) := 1, \quad f_1(x) := x, \quad \dots, \quad f_k(x) := x^k$$

で定める．このとき，正の整数 n に対して f_0, \dots, f_n は 1 次独立である．

実際，スカラ $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ に対して

$$\begin{aligned} \lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_n f_n = 0 &\Leftrightarrow (\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_n f_n)(x) = 0(x) \text{ がすべての } x \text{ に対して成り立つ} \\ &\Leftrightarrow \lambda_0 f_0(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0 \text{ がすべての } x \text{ に対して成り立つ} \\ &\Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_n x^n = 0 \text{ がすべての } x \text{ に対して成り立つ.} \end{aligned}$$

この最後の式の左辺を $F(x)$ と書くと， $F(x) = 0$ (恒等式) ならば $F(0) = 0, F'(0) = 0, \dots, F^n(0) = 0$ である．このことから $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$ を得る．

例 1.17. 例 1.6 の $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ の要素 $g_0, g_1, \dots, h_1, h_2, \dots$ を

$$\begin{aligned} g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = \cos x, \quad g_2(x) = \cos 2x, \quad \dots, g_k(x) = \cos kx, \\ h_1(x) = \sin x, \quad h_2(x) = \sin 2x, \quad \dots, h_k(x) = \sin kx \end{aligned}$$

で定めると $\{g_0, g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_n\}$ は 1 次独立である．このことは，しばらく後で (内積の項で) 示す．

例 1.18. 例 1.6 の $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ の要素 a, b, c を

$$a(x) = 1, \quad b(x) = \cos 2x, \quad c(x) = \cos^2 x$$

で定めると， a, b, c は 1 次従属である．実際， $a + b - 2c = 0$ である．

例 1.19. 例 1.13 の特別な場合 ($\alpha = 0, \beta = 1$) を考える：

$$V := \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ は 2 回微分可能で } f''(x) = -f(x) \text{ を満たす} \right\}$$

とすると V は $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ の部分空間である．とくに

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \sin x$$

とおくと， $f, g \in V$ で，さらにこれらは 1 次独立である．

問題

- 1-1 例 1.4 において $M(m, n)$ の加法とスカラ倍はどのように定義すればよいか．また，零ベクトルにあたる $M(m, n)$ の要素は何か．
- 1-2 例 1.6 において $\mathcal{F}(X)$ がベクトル空間となる，すなわち，この例に挙げたように加法とスカラ倍を定義すれば，定義 1.1 の条件が成り立つことを確かめなさい．
- 1-3 例 1.5 の S (数列のなすベクトル空間) の部分集合

$$\left\{ \mathbf{a} = \{a_j\}_{j=0}^{\infty} \mid \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \text{ は収束する} \right\}$$

は S の部分空間である．このことを確かめなさい．ヒント：解析学の定理「絶対収束する級数の和は絶対収束する」そのもの．

1-4 例 1.13 を確かめなさい .

1-5 例 1.14 を確かめなさい .

1-6 例 1.15 を確かめなさい .

1-7 例 1.19 を確かめなさい .

1-8 例 1.13 の (1.3) で与えられる $V_{\alpha, \beta} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ を考える .

- $\alpha^2 - 4\beta > 0$ のとき ,

$$f(x) = e^{ax}, \quad g(x) = e^{bx}$$

で定まる f, g が $V_{\alpha, \beta}$ の 1 次独立な要素になるように定数 a, b を定めなさい . また ,

$$\tilde{f}(x) = e^{px} \cosh rx, \quad \tilde{g}(x) = e^{qx} \sinh rx$$

で定まる \tilde{f}, \tilde{g} が $V_{\alpha, \beta}$ の 1 次独立な要素になるように定数 $p, q, r (> 0)$ を定めなさい .

- $\alpha^2 - 4\beta < 0$ のとき ,

$$f(x) = e^{ax} \cos pt, \quad g(x) = e^{bx} \sin qt$$

で定まる f, g が $V_{\alpha, \beta}$ の 1 次独立な要素になるように定数 a, b, p, q を定めなさい . ただし $p, q > 0$ とする .

- $\alpha^2 - 4\beta = 0$ のとき ,

$$f(x) = e^{ax}, \quad g(x) = xe^{bx}$$

で定まる f, g が $V_{\alpha, \beta}$ の 1 次独立な要素になるように定数 a, b を定めなさい .

2 基底・次元

前に引き続き（実数上の）ベクトル空間 V を考える．

2.1 基底

定義 2.1. ベクトル空間 V の有限個の要素の組 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ が V の基底 a basis であるとは，次を満たすことである．

- (1) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ が 1 次独立．
- (2) $V = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ ，すなわち V は $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ で生成される．

補題 2.2. ベクトル空間 V の要素の組 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ が V の基底であるための必要十分条件は

V の任意の要素は $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ の一次結合でただひとつ通り（一意的 unique）に表されることである．

証明：組 $\{\mathbf{a}_j\}$ が V の基底であるとするとき，定義 2.1 の条件 (2) から（例 1.8 を思いだせば）

$$V = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle = \{\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

であるから， v は $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n$ の形に表される．さらに， v が $\{\mathbf{a}_j\}$ の一次結合でふた通りに表されたとする：

$$v = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \mu_n \mathbf{a}_n$$

すると

$$(\lambda_1 - \mu_1) \mathbf{a}_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) \mathbf{a}_n = \mathbf{o}$$

となるので，定義 2.1 の条件 (1) から $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n$ となるので，ふた通りの表し方は一致しなければならない．すなわち任意の $v \in V$ は $\{\mathbf{a}_j\}$ の一次結合の形でひとつ通りに表される．

逆に任意の $v \in V$ が $\{\mathbf{a}_j\}$ の一次結合で一意的に表されるとすると，とくに定義 2.1 の (2) が成り立っている．さらに， $\mathbf{o} = 0\mathbf{a}_1 + \dots + 0\mathbf{a}_n$ なので， V の要素を $\{\mathbf{a}_j\}$ で表す表し方がひとつ通りであることから

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{o}$$

ならば $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ なので定義 2.1 の (1) が成り立つ．

例 2.3. 正の整数 n をひとつ固定する． n 次単位行列 I の j 列目の列ベクトルを e_j と書く ($j = 1, \dots, n$) このとき $\{e_1, \dots, e_n\}$ を \mathbb{R}^n の基本ベクトルとよぶ．基本ベクトル $\{e_1, \dots, e_n\}$ は \mathbb{R}^n の基底である．このことは定義 2.1 を直接確かめてもよいし，補題 2.2 を用いても容易に確かめられる．

例 2.4. n 次正則行列 $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$ に対して， $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ は \mathbb{R}^n の基底を与える．

実際， $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{o}$ は $A\lambda = \mathbf{o}$ ($\lambda = {}^t[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$) と書き換えられるので， A の正則性から $\{\mathbf{a}_j\}$ の一次独立性が得られる．また， $v \in \mathbb{R}^n$ に対して $v = A(A^{-1}v) = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n$ (ただし ${}^t[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = A^{-1}v$) なので $\mathbb{R}^n = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ ．

2.2 次元

補題 2.5. ベクトル空間 V のふた組みの要素の組 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}, \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ がともに V の基底ならば $m = n$ が成り立つ.

証明: $\{\mathbf{a}_j\}$ が V の基底を与えていることから, 各 \mathbf{b}_k は \mathbf{a}_j の一次結合で表される:

$$\mathbf{b}_k = \alpha_{1k}\mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_{mk}\mathbf{a}_m \quad (k = 1, \dots, n).$$

これを形式的に行列を用いて

$$[\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n] = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m]A \quad A = [\alpha_{ij}]$$

と表す. ただし A は $m \times n$ 型行列. ここで

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_n\mathbf{b}_n = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n]\boldsymbol{\lambda} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m]A\boldsymbol{\lambda} \quad (\boldsymbol{\lambda} = {}^t[\lambda_1, \dots, \lambda_n])$$

であるから, $\{\mathbf{a}_j\}$ が一次独立であることを用いれば

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_n\mathbf{b}_n = \mathbf{o} \Leftrightarrow [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m]A\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{o} \Leftrightarrow A\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{o}$$

さらに $\{\mathbf{b}_i\}$ も一次独立であったから, この最後の方程式 $A\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{o}$ は非自明な解をもたない. したがって, この節の最後に挙げる補題 2.15 と 2.14 から $\text{rank } A = n \leq m$ が成り立つ. 同じ議論を $\{\mathbf{a}_j\}$ と $\{\mathbf{b}_i\}$ の役割を入れ替えて行えば $m \leq n$ が成り立つので $m = n$ である.

定義 2.6. • ベクトル空間 V に基底 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ が存在するとき, n (ひとつの基底を構成するベクトルの個数) を V の次元 dimension といい, $\dim V$ と表す*5.

- ベクトル空間 V が零ベクトル \mathbf{o} のみからなる場合は, V は 0 次元, すなわち $\dim V = 0$ であると定める.
- 零ベクトル以外の要素をもつようなベクトル空間 V が基底をもたないとき V は無限次元 infinite dimensional であるといい $\dim V = \infty$ とかく.

例 2.7. \mathbb{R}^n の次元は n である.

\mathbb{R}^n の部分空間の次元 以下の事実は次回証明する. \mathbb{R}^n の具体的な部分空間の次元の求め方は前期に扱った.

例 2.8. $m \times n$ 行列 A に対して

$$V := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$$

とすると, V は \mathbb{R}^n の部分空間である (例 1.9). とくに

$$\dim V = n - \text{rank } A$$

が成り立つ.

例 2.9. \mathbb{R}^n のベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ が生成する \mathbb{R}^n の部分空間の次元は

$$\text{rank}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k]$$

に一致する.

*5 この定義をするために補題 2.5 が必要. 実際, 基底をいろいろ取ることにより基底を構成するベクトルの個数が変わるのでは次元が定義できない.

無限次元

命題 2.10. ベクトル空間 V が無限次元であるための必要十分条件は、任意の正の整数 n に対して、一次独立な V の要素が n 個 存在することである。

証明: $\dim V = m$ (有限次元) ならば任意の $m+1$ 個以上の V の要素は一次従属である (演習問題). したがって任意の n に対して、一次独立な V の要素 n が存在するならば $\dim V = \infty$. 一方、 n 個の一次独立なベクトル $\{a_1, \dots, a_n\}$ が存在し、かつ $n+1$ 個以上の V のベクトルの組は必ず 1 次従属であるとする. このとき任意の $v \in V$ に対して $\{a_1, \dots, a_n, v\}$ は一次従属だから、 v は $\{a_j\}$ の一次結合で表される (すこし議論が必要. 演習問題). したがって $\{a_j\}$ は V の基底となるので、 $\dim V = n$.

例 2.11. 例 1.5 で挙げた数列のなすベクトル空間 $S =$ (実数を成分とする無限数列全体) は無限次元である.

実際、例 1.15 より、任意の n に対して S の一次独立な n 個の要素をとることができる.

例 2.12. 例 1.6 で与えられた \mathbb{R} 上で定義された関数全体の成すベクトル空間 $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ は無限次元である.

実際に $f_k(x) = x^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) で $f_k \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ を定義すると、 $\{f_0, \dots, f_n\}$ は一次独立である (例 1.16 参照).

例 2.13. 前回の例 1.19 で挙げたベクトル空間

$$(2.1) \quad V := \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ は } 2 \text{ 回微分可能で } f''(x) = -f(x) \text{ を満たす} \right\}$$

の次元は 2 である.

$p(x) = \cos x$, $q(x) = \sin x$ とおくと $p, q \in V$ かつ p と q は一次独立である (問題 1-8). 以下、 V が p, q で生成されることを示そう. $f \in V$ に対して $a = f(0)$, $b = f'(0)$ とおき、

$$g(x) := a \cos x + b \sin x = (ap + bq)(x)$$

とおく. このとき f と g が一致することを示せば十分である. これを示すために、 $h = f - g$ とおくと $h \in V$ で、 $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$ である:

$$h''(x) + h(x) = 0, \quad h(0) = h'(0) = 0.$$

すると、任意の x に対して

$$\begin{aligned} h'(x)h''(x) + h(x)h'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\{h'(x)\}^2 + \{h(x)\}^2 \right) = 0 \\ &\Rightarrow \{h'(x)\}^2 + \{h(x)\}^2 = \text{一定 } \{h'(0)\}^2 + \{h(0)\}^2 = 0 \end{aligned}$$

とくに $h(x) = 0$ が任意の x に対して成立する. したがって $h = 0$, すなわち $f = g = ap + bq$.

2.3 復習—同次連立一次方程式の自明でない解

前期の講義の定義に従えば、同次連立一次方程式

$$(2.2) \quad Ax = o \quad (A \text{ は } m \times n \text{ 型行列, 未知ベクトル } x \text{ は } n \text{ 次列ベクトル})$$

の解 (解空間) とは、集合 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = o\}$ のことであった. とくに (2.2) の解は n 次の零ベクトル o を含む. これを、自明な解 the trivial solution という. 解が o 以外の要素を含むとき、(2.2) は非自明な nontrivial 解をもつという.

補題 2.14. 行列 A が $m \times n$ 型でその階数 rank が r ならば, $r \leq m$ かつ $r \leq n$ が成り立つ.

証明: 行列 A は行基本変形により階数 r の階段行列 (テキスト 25 ページ) B に変形できる. とくに階段行列の形から, B の列ベクトルを入れ替えれば

$$\begin{bmatrix} I_r & * \\ O & O \end{bmatrix} \quad (I_r \text{ は } r \text{ 次の単位行列})$$

の形となる. これらの変形は行列の型を変えていないから r はもとの行列の行, 列の数を超えない.

補題 2.15. 同次連立一次方程式 (2.2) が非自明な解をもたないための必要十分条件は, 係数行列 A の階数 r が未知数の個数 n と一致することである.

証明: 行基本変形と列の入れ替え (列基本変形) によって, A は補題 2.14 の証明の形に変形できる. さらに第 j 列 ($j > r$) に第 1 列から第 r 列のスカラー倍を加える (列基本変形) により, $r+1$ 列目以降を 0 にすることができる. 行 (列) 基本変形は正則行列を左 (右) からかける操作だから

$$(*) \quad PAQ = C = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

となる m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在する.

いま, 補題 2.14 より $r \leq n$ であるが, $r < n$ とするとき $x := Qe_{r+1}$ (e_{r+1} は \mathbb{R}^n の $r+1$ 番目の基本ベクトル) とおけば, Q が正則行列であることから $x \neq o$, かつ

$$Ax = P^{-1}CQ^{-1}x = P^{-1}(Ce_{r+1}) = P^{-1}o = o.$$

したがって (2.2) は非自明な解をもつ. このことから (2.2) が非自明な解を持たないならば $r = n$.

一方, $r = n$ ならば, $*$ は

$$PAQ = C = \begin{bmatrix} I_n \\ O \end{bmatrix}$$

の形になるので, P, Q が正則であることに注意すれば,

$$Ax = o \Rightarrow P^{-1}CQ^{-1}x = o \Rightarrow CQ^{-1}x = o \Rightarrow I_n Q^{-1}x = o \Rightarrow Q^{-1}x = o \Rightarrow x = o,$$

すなわち (2.2) の解は自明なもののみからなる.

問題

2-1 例 2.3 を確かめなさい.

2-2 例 2.4 を確かめなさい.

2-3 n 次元ベクトル空間 V の n 個のベクトルの組 $\{v_1, \dots, v_n\}$ が V の基底であるための必要十分条件はこれらが一次独立となることである. (ヒント: V の基底 $\{a_1, \dots, a_n\}$ を一つ固定して, 基底変換^{*6} $[v_1, \dots, v_n] = [a_1, \dots, a_n]A$ を考えると, $\{v_j\}$ が一次独立ことは A の正則性と同値).

2-4 n 次元ベクトル空間 V の n 個のベクトルの組 $\{v_1, \dots, v_n\}$ が V の基底であるための必要十分条件はこれらが V を生成することである.

^{*6} $\{a_1, \dots, a_n\}$ が V の基底ならば, 各 v_k ($k = 1, \dots, n$) は

$$v_k = \alpha_{1k}a_1 + \dots + \alpha_{nk}a_n$$

とただひと通りに書ける. このことを正方行列 $A = [\alpha_{jk}]$ を用いて $[v_1, \dots, v_n] = [a_1, \dots, a_n]A$ と表す. $\{v_1, \dots, v_n\}$ が基底となるとき, 行列 A を基底 $\{a_j\}$ から基底 $\{v_j\}$ への基底変換という.

2-5 テキスト 91 ページ問 12, 111 ページ, 4.4, 4.5, 4.6, 112 ページ 4.15 (前期の講義資料 13 から再録)

2-6 ベクトル空間 V の次元が n ならば, V の m 個 ($m \geq n+1$) のベクトルは一次従属である.

2-7 ベクトル空間 V の n 個の一次独立なベクトル $\{a_1, \dots, a_n\}$ が存在し, かつ $n+1$ 個以上の V のベクトルの組は必ず 1 次従属ならば, このとき任意の $v \in V$ は $\{a_j\}$ の一次結合で表される. (ヒント: $\{a_1, \dots, a_n, v\}$ は一次従属なので $\lambda_0 v + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = o$ を満たす $[\lambda_0, \dots, \lambda_n] \neq o$ が存在する. このとき $\lambda_0 \neq 0$ となることを示せばよい.)

2-8 例 2.11 を確かめなさい. また, 例 1.10 の S_c , 問題 1-3 の空間はそれぞれ無限次元であることを示しなさい.

2-9 例 2.12 を確かめなさい. また, 例 1.11 の $C(\mathbb{R}), C^r(\mathbb{R})$ はそれぞれ無限次元であることを示しなさい.

2-10 例 2.13 を確かめなさい.

2-11 数列の集合

$$V := \left\{ \mathbf{a} = \{a_j\}_{j=0}^{\infty} \mid a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots) \right\}$$

すなわち 3 項間の同次線形漸化式を満たす数列全体の集合を考える. このとき

- V が S の部分空間であることを確かめなさい.
- V は有限次元か.

3 線形写像・表現行列

言葉の準備：写像 集合 X (定義域; a domain) のそれぞれの要素に集合 Y (値域; a target) の要素をひとつ対応させる対応の規則を (X から Y への) 写像 a map, a mapping という。

- 「 f は集合 X から Y への写像である」ということを「 $f: X \rightarrow Y$ 」と書く。
- 写像 $f: X \rightarrow Y$ によって, X の要素 x に対応する Y の要素を $f(x)$ と書く。
- 写像 $f: X \rightarrow Y$ が「 $x \in X$ に対して $f(x)$ を対応させる」ということを $f: x \mapsto f(x)$ (定義域・値域を明示したいときは $f: X \ni x \mapsto f(x) \in Y$) と書く。矢印の形の違いに注意。
- とくに値域 Y が数の集合 (\mathbb{R} や \mathbb{C} の部分集合) のとき, たとえば写像 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を X 上の関数 a function (実数値関数 a real-valued function) ということが多い。

定義 3.1. 写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ に対して次で定まる写像 $g \circ f: X \rightarrow Z$ を g と f の合成写像 the composition という：

$$g \circ f: X \ni x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in Z.$$

定義 3.2. 集合 X の要素に対してそれ自身を対応させる写像 $\text{id}_X: X \rightarrow X$ を恒等写像 the identity map という： $\text{id}_X: X \ni x \mapsto x \in X$ 。定義域・値域が文脈から明らかなきときは, X を省略して単に id と書くこともある。

例 3.3. 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して $f \circ \text{id}_X = f, \text{id}_Y \circ f = f$ 。

定義 3.4. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が

- 単射 injective または 1 対 1 の写像であるとは, $x_1, x_2 \in X$ が $f(x_1) = f(x_2)$ を満たすなら $x_1 = x_2$ が成り立つことである。
- 全射 surjective または上への写像であるとは, 各 $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる x が少なくとも一つ存在することである。
- 全単射 bijective であるとは, 全射かつ単射となることである。

注意 3.5. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が単射であるための必要十分条件は「 $x_1, x_2 \in X$ が $x_1 \neq x_2$ を満たすならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ を満たす」ことである。(定義の対偶をとればよい)

事実 3.6. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が全単射ならば, 任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ がただ一つだけ存在する。このことから, 新たな写像

$$g: Y \ni y \mapsto g(y) = (f(x) = y \text{ となる } x) \in X$$

が得られる。この写像 g は

$$g \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

を満たしている。

定義 3.7. 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, $g \circ f = \text{id}_X, f \circ g = \text{id}_Y$ を満たすような写像 $g: Y \rightarrow X$ が存在するとき, g を f の逆写像 the inverse といって $g = f^{-1}$ と書く.

事実 3.8. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が逆写像をもつための必要十分条件は f が全単射となることである. このとき f^{-1} は事実 3.6 で与えた g である.

数ベクトル空間の線形写像

定義 3.9 (テキスト 98 ページ). 写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が線形写像 a linear map であるとは, 次を満たすことである:

- 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(x + y) = f(x) + f(y)$ が成り立つ.
- 任意の $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ に対して $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ が成り立つ.

とくに $m = n$ のとき, すなわち定義域と値域が一致するときは, 線形写像 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ を線形変換, 1 次変換 a linear transformation とよぶこともある.

注意 3.10. 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して

- $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ が成り立つ. 実際, $f(\mathbf{o}) = f(0\mathbf{x}) = 0f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$.
- $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ が成り立つ. 実際, $f(-\mathbf{x}) = f((-1)\mathbf{x}) = (-1)f(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$.
- $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k) = \lambda_1 f(\mathbf{a}_1) + \dots + \lambda_k f(\mathbf{a}_k)$$

が成り立つ.

例 3.11. $m \times n$ 型行列 A に対して

$$f_A: \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$$

は線形写像である. これを, 行列 A が定める線形写像という.

定理 3.12. 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して, $f = f_A$ となる $m \times n$ 行列 A が (唯一とつ) 存在する. ただし f_A は例 3.11 で与えた行列 A が定める線形写像である.

証明: $\{e_1, \dots, e_n\}$ を \mathbb{R}^n の基本ベクトル (例 2.3 参照) として, $\mathbf{a}_j := f(e_j) \in \mathbb{R}^m$ ($j = 1, \dots, n$), $A := [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$ とおくと A は $m \times n$ 行列である. いま, $\mathbf{x} = {}^t[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ は $\mathbf{x} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ と書けるから, f の線形性から

$$f(\mathbf{x}) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\mathbf{x} = f_A(\mathbf{x})$$

となる.

すなわち \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^m への線形写像は例 3.11 ですべて尽くされる. 定理 3.12 で与えられる行列 A を線形写像 f の表現行列という*7.

*7 この節の後半の言葉で言えば標準基底に関する表現行列.

例 3.13. 恒等変換 $\text{id}_{\mathbb{R}^m}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ は線形変換で、その表現行列は m 次の単位行列である。

命題 3.14. • 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ の表現行列をそれぞれ A, B とすると、 $g \circ f$ の表現行列は BA である。

- 線形変換 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が全単射ならば、その表現行列 A は n 次の正則行列で、 f^{-1} は A^{-1} を表現行列にもつ線形変換である。

証明：前半： $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(Ax) = B(Ax) = (BA)x$. 後半： f が全単射なら逆写像 f^{-1} が存在する。さらに f^{-1} は線形写像である。実際 $f^{-1}(y_1) = x_1, f^{-1}(y_2) = x_2$ とおくと、 $f^{-1}(y_1 + y_2) = x_1 + x_2$. ここで $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = y_1 + y_2$ だから $x_1 + x_2 = f^{-1}(y_1 + y_2)$ (ここで " f^{-1} が存在すること" を用いて)。スカラー倍についても同様なことが言えるので f^{-1} の線形性が言えた。そこで f^{-1} の表現行列を B とすると、 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}$ であることと、例 3.13 から $AB = BA = I$ 。

ベクトル空間の線形写像 以下、 V, W を (\mathbb{R}^n やその部分空間とは限らない) ベクトル空間とする。

定義 3.15. ベクトル空間 V から W への写像 $f: V \rightarrow W$ が線形写像 a linear map であるとは、(1) 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(x + y) = f(x) + f(y)$, (2) 任意の $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ に対して $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ が成り立つことである。とくに $W = V$ のとき、線形写像 $f: V \rightarrow V$ は V の線形変換 または 1 次変換 a linear transformation とよばれることがある。

例 3.16. 数列全体の空間 \mathcal{S} (例 1.5 参照) の要素 $x = \{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ に対して $s(x) \in \mathcal{S}, S(x) \in \mathcal{S}, \delta(x) \in \mathcal{S}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} s(x) = y &= \{y_j\}_{j=0}^{\infty}, & y_j &= x_{j+1} & (j = 0, 1, 2, \dots), \\ S(x) = z &= \{z_j\}_{j=0}^{\infty}, & z_j &= \sum_{l=0}^j x_l & (j = 0, 1, 2, \dots), \\ \delta(x) = w &= \{w_j\}_{j=0}^{\infty}, & z_j &= w_{j+1} - w_j & (j = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

で定めると、 s, S, δ はそれぞれ \mathcal{S} の線形変換である。

例 3.17. 正の整数 r に対して、実数全体で定義された実数値 C^r -級関数全体のなすベクトル空間 $C^r(\mathbb{R})$ (例 1.11 の要素 f に対して $D(f)$ を $D(f)(x) = f'(x)$ により定めると、 $D(f)$ は C^{r-1} -級の関数である。したがって、写像 $D: C^r(\mathbb{R}) \rightarrow C^{r-1}(\mathbb{R})$ が定義されるが、これは線形写像である。このことを微分の線形性 ということがある。

とくに、任意の正の整数 r に対して C^r -級であるような関数を C^∞ -級という。実数全体で定義された実数値 C^∞ -級関数全体の集合を $C^\infty(\mathbb{R})$ と表すことにすれば、 $C^\infty(\mathbb{R})$ は \mathbb{R} 上で定義された実数値関数全体の集合 $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ の部分空間になる。

実際、 $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ ならば任意の正の整数 r に対して $f, g \in C^r(\mathbb{R})$ なので、例 1.11 から $f + g, \lambda f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) は $C^r(\mathbb{R})$ の要素。ここで r は任意だったから $f + g, \lambda f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 。

とくに $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ なら $Df = f' \in C^\infty(\mathbb{R})$ なので $f \mapsto f'$ は $C^\infty(\mathbb{R})$ の線形変換である。

表現行列 以下、ベクトル空間 V, W の次元は有限であるとし、 $n := \dim V, m := \dim W$ として、 V の基底 $\{a_1, \dots, a_n\}$, W の基底 $\{v_1, \dots, v_m\}$ をそれぞれとっておく。すると

ベクトル $x \in V$ に対して

$$x = x_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

となるスカラー x_1, \dots, x_n がただひとつ存在する。これを x の基底 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ に関する成分 components という。

ここで V は \mathbb{R}^N やその部分空間とは限らないことに注意しておく。したがって $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$ は普通の意味で行列であるとは限らない。

同様に $y \in W$ も $y = y_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + y_m \mathbf{v}_m$ と表すことができる。

ここで、線形写像 $f: V \rightarrow W$ を考える。 V の基底 $\{\mathbf{a}_j\}$ のうち一つのベクトル \mathbf{a}_j をとると、 $f(\mathbf{a}_j) \in W$ だから

$$f(\mathbf{a}_j) = \alpha_{1j} \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{mj} \mathbf{v}_m = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m] \begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{bmatrix} \quad (\alpha_{jk} \text{ はスカラー})$$

と書くことができる。これらを全て並べると

$$(3.1) \quad [f(\mathbf{a}_1), \dots, f(\mathbf{a}_n)] = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m] A \quad \left(A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \right)$$

と書くことができる。式 (3.1) で現れる A を、

線形写像 f の、基底 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}, \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ に関する表現行列 the matrix representation

という。このとき

$$f \left([\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m] A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

となっている。

例 3.18. \mathbb{R}^n の基本ベクトル $\{e_1, \dots, e_n\}$ (例 2.3 参照) は \mathbb{R}^n の基底をなす。これを \mathbb{R}^n の標準基底 the canonical basis という。すると、定理 3.12 で与えた線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ の表現行列は、ここでの言葉を使うと“ f の、 $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ の標準基底に関する表現行列”ということができる。

例 3.19. 実数を係数とする高々 k 次の多項式で表される関数全体からなる線形空間 \mathcal{P}^k (例 1.12 参照) を考える。 $f_0(x) = 1, f_1(x) = x, \dots, f_k(x) = x^k$ とおくと、 $\{f_0, \dots, f_k\}$ は \mathcal{P}^k の基底になる(確かめよ; 1 次独立性は例 1.16)。

いま、正の定数 k に対して $F: \mathcal{P}^k \rightarrow \mathcal{P}^{k-1}$ を $F(f)(x) = f'(x)$ とおくと F は線形写像である。とくに $F(f_k) = f_k' = kx^{k-1}$ ($k \geq 1$), $F(f_0) = 0$ だから、 F の基底 $\{f_0, \dots, f_k\}, \{f_0, \dots, f_{k-1}\}$ に関する表現行列は

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$$

である。

線形変換の場合 有限次元ベクトル空間 V の線形変換 $f: V \rightarrow V$ の定義域 V と値域 V は同じ集合だから、同一の基底をとるのが自然である。線形変換 f の定義域の基底 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ 、値域の基底 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ に関する表現行列を単に

線形変換 $f: V \rightarrow V$ の基底 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ に関する表現行列

という。ベクトル空間 V の次元が n のとき、 V の線形変換の表現行列は n 次正方行列である。

例 3.20. 例 3.19 で $\mathcal{P}^{k-1} \subset \mathcal{P}^k$ が成り立つので、 F は \mathcal{P}^k の線形変換とすることもできる。このとき、 F の基底 $\{f_0, \dots, f_k\}$ に関する表現行列は

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

である。

基底変換 この節では線形写像は現れない。ベクトル空間 V の次元を n 、 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ を V の基底とする。このとき、 V の n 個のベクトルの組 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ に対して

$$(3.2) \quad [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]A \quad (A \text{ は } n \text{ 次正方行列})$$

を満たす正方行列 A が存在する。とくに $\{\mathbf{v}_j\}$ が V の基底であるための必要十分条件は A が正則となることである。

実際、 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ が基底であることから、各 \mathbf{v}_k は $\{\mathbf{a}_j\}$ の 1 次結合で表されるので (3.2) のような A は存在する。ここで $\lambda = {}^t[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ に対して

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{o} \Leftrightarrow [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]\lambda = \mathbf{o} \Leftrightarrow [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]A\lambda = \mathbf{o} \Leftrightarrow A\lambda = \mathbf{o}$$

となる。最後の同値関係は $\{\mathbf{a}_j\}$ が 1 次独立であることによる。この最後の方程式が自明な解しか持たないための必要十分条件は A が正則なことだから $\{\mathbf{v}_j\}$ が 1 次独立であるための必要十分条件は A が正則となることである。このことから、 $\{\mathbf{v}_j\}$ が基底ならば A は正則。逆に A が正則なら、任意の $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n \in V$ は

$$\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]A^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

なので \mathbf{x} は $\{\mathbf{v}_j\}$ の 1 次結合で表される。したがって $V = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ となるので $\{\mathbf{v}_j\}$ は基底である。

このとき、3.2 の A を基底 $\{\mathbf{a}_j\}$ から基底 $\{\mathbf{v}_j\}$ への基底変換行列という。

例 3.21. 次で定義される $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ 、 $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ はともに \mathbb{R}^3 の基底を与える：

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

このとき、 $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ 、 $B = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]$ とおくと、これらは 3 次の正則行列で、

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] = B = AA^{-1}B = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]A^{-1}B$$

なので $\{a_1, a_2, a_3\}$ から $\{b_1, b_2, b_3\}$ への基底変換行列は $A^{-1}B$ である.

例 3.22. 例 3.19 で定義した多項式の空間, とくに \mathcal{P}^3 を考える. 組 $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ ($f_j(x) = x^j$) は \mathcal{P}^3 の基底となり, $\dim \mathcal{P}^3 = 4$ であることはすでにみた. 一方,

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = x - 1, \quad g_2(x) = (x - 1)^2, \quad g_3(x) = (x - 1)^3$$

とおくと

$$[g_0, g_1, g_2, g_3] = [f_0, f_1, f_2, f_3] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる. したがって $\{g_0, g_1, g_2, g_3\}$ も \mathcal{P}^3 の基底であり, 上の式の行列が基底変換行列となっている.

問題

3-1 例 3.11 を確かめなさい.

3-2 例 3.13 を確かめなさい.

3-3 命題 3.14 を示しなさい.

3-4 テキスト 111 ページ 4.7, 4.8; 112 ページ 4.9; 113 ページ 4.18.

3-5 例 3.16, 3.17, 3.19, 3.20 を確かめなさい.(ヒント: 難しいことは考えなくて良い. ただ定義を満たしていることを確かめればよい.)

3-6 例 3.21 の $\{a_1, a_2, a_3\}, \{b_1, b_2, b_3\}$ を用いて

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3$$

と表すときに, y_1, y_2, y_3 を x_1, x_2, x_3 で表しなさい.(ヒント: 行列表示をするとわかりやすい)

3-7 例 3.22 を確かめなさい.

3-8 ベクトル空間 V の 2 つの基底 $\{a_1, \dots, a_n\}, \{b_1, \dots, b_n\}$ の間の基底変換行列を P , ベクトル空間 W の 2 つの基底 $\{v_1, \dots, v_n\}, \{w_1, \dots, w_n\}$ の間の基底変換行列を Q とする:

$$[b_1, \dots, b_n] = [a_1, \dots, a_n]P, \quad [w_1, \dots, w_n] = [v_1, \dots, v_n]Q.$$

ここで, 線形写像 $f: V \rightarrow W$ の基底 $\{a_j\}, \{v_j\}$ に関する表現行列を A , 基底 $\{b_j\}, \{w_j\}$ に関する表現行列を B とすると $B = Q^{-1}AP$ が成り立つ.

3-9 実数 θ に対して行列

$$A := \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

で表される線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える. すなわち, 線形変換 f の, 基底 $\{e_1, e_2\}$ に関する表現行列が A である. いま, $a_1 = {}^t[\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}]$, $a_2 = {}^t[-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}]$ とするとき

(1) $\{a_1, a_2\}$ は \mathbb{R}^2 の基底であることを確かめなさい.

(2) 線形変換 $f = f_A$ の基底 $\{a_1, a_2\}$ に関する表現行列を求めなさい.

(3) f の図形的な意味を述べなさい.

4 次元定理

線形写像の像と核 ベクトル空間 V からベクトル空間 W への線形写像 $f: V \rightarrow W$ に対して

$$\text{Ker } f := \{x \in V \mid f(x) = \mathbf{o}\}, \quad \text{Im } f := \{y \in W \mid y = f(x) \text{ となるような } x \in V \text{ が存在する}\},$$

とおき, それぞれ f の核 the kernel, 像 the image という.

補題 4.1. 線形写像 $f: V \rightarrow W$ に対して $\text{Ker } f$ は V の部分空間, $\text{Im } f$ は W の部分空間である.

まず $\text{Ker } f, \text{Im } f$ は空集合ではないことに注意する.

つぎに, $x_1, x_2 \in \text{Ker } f$ とすると, $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$ すなわち $x_1 + x_2 \in \text{Ker } f$. さらに $x \in V$ とスカラー λ に対して $\lambda x \in \text{Ker } f$ (演習問題).

また, $y_1, y_2 \in \text{Im } f$ とすると, $x_1, x_2 \in V$ で $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ となるものがとれる. すると $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = y_1 + y_2$ だから, $y_1 + y_2 \in \text{Im } f$. 同様に $\lambda y \in W$ ($\lambda \in \mathbb{R}, y \in \text{Im } f$).

例 4.2. 行列 A が $m \times n$ 型るとき, 線形写像 $f_A: \mathbb{R}^n \ni x \mapsto f_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^m$ を考えることができる. このとき,

$$\begin{aligned} \text{Ker } f_A &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \mathbf{o}\} = \text{同次連立一次方程式 } Ax = \mathbf{o} \text{ の解} \\ \text{Im } f_A &= \{\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{a}_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle \\ &= \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \text{ が生成する } \mathbb{R}^m \text{ の部分空間} \end{aligned}$$

である. ただし $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$.

例 4.3. いま

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

として, 例 4.2 の $m = 4, n = 5$ の場合を考える. この行列 A に行基本変形を施して階段行列 B をつくと,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なので $\text{rank } A = \text{rank } B = 3$. この形から $x_1 = {}^t[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0]$, $x_2 = {}^t[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, -1, 1]$ とおくと

$$\text{Ker } f_A = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = \mathbf{o}\} = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \langle x_1, x_2 \rangle$$

だが, x_1, x_2 は 1 次独立だから, これらは $\text{Ker } f_A$ の基底をつくる. すなわち, $\dim \text{Ker } f_A = 2$.

一方 $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5]$ とおくと, 対応する階段行列の形から, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\}$ は 1 次独立で, $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ はそれらの 1 次結合で表されるから, $\text{Im } f_A = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5 \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5 \rangle$. とくに $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\}$ は $\text{Im } f_A$ の基底で, $\dim \text{Im } f_A = 3 = \text{rank } A$.

例 4.4. 例 4.2 で, 一般に $\dim \text{Im } f_A = \text{rank } A$, $\dim \text{Ker } f_A = n - \text{rank } A$ である.

証明：行列 A に行（列）基本変形を施す，すなわち左（右）から正則行列をかけることにより，

$$PAQ = C = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \quad (P (Q) \text{ は } n \text{ 次 } (m \text{ 次}) \text{ 正則行列, } I_r \text{ は } r \text{ 次単位行列, } r = \text{rank } A)$$

の形にできる（補題 2.15 の証明参照）．

$\text{Im } f_A$ の次元を求めよう： $A := [a_1, \dots, a_n], B := [b_1, \dots, b_n] := AQ^{-1}$ とすると， Q が正則行列であることから，

$$\text{Im } f_A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$$

が成り立つ（演習問題）．ここで $[b_1, \dots, b_n] = AQ = P^{-1}C$ なので， $b_j = P^{-1}e_j (1 \leq j \leq r)$ ， $b_j = o (j > r)$ ，ただし $\{e_j\}$ は \mathbb{R}^m の標準基底．とくに $\{b_1, \dots, b_r\}$ は 1 次独立なのでこれらが $\text{Im } f_A$ の基底となる．

一方，

$$\begin{aligned} Ax = o &\Leftrightarrow P^{-1}CQ^{-1}x = o \Leftrightarrow CQ^{-1}x = o \\ &\Leftrightarrow Q^{-1}x = \alpha_{r+1}e'_{r+1} + \dots + \alpha_n e'_n \quad (\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

ただし $\{e'_j\}$ は \mathbb{R}^n の標準基底．したがって $\text{Ker } f_A = \langle Qe_{r+1}, \dots, Qe_n \rangle$ となるが，とくに $\{Qe_{r+1}, \dots, Qe_n\}$ は $\text{Ker } f_A$ の基底となる．

補題 4.5. ベクトル空間 V から W への線形写像 $f: V \rightarrow W$ が単射であるための必要十分条件は $\text{Ker } f = \{o\}$ となることである．

証明：線形写像の性質 $f(o) = o$ から， f が単射なら “ $f(x) = o$ ならば $x = o$ ” なので必要性が示せる．充分性： $\text{Ker } f = \{o\}$ ならば $f(x) = o$ を満たす x は o のみだから， $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $f(x_2 - x_1) = o$ したがって， $x_1 = x_2$ ．

次元定理 次は，例 4.4 が一般のベクトル空間の間の線形写像に対しても成り立つことを示している：

定理 4.6 (次元定理 the rank-nullity theorem). 有限次元ベクトル空間 V, W の間の線形写像 $f: V \rightarrow W$ に対して，

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim V$$

が成り立つ．

とくに $\dim \text{Im } f$ のことを線形写像の階数 rank ということがある．

証明：基底を固定して f の表現行列に対して例 4.4 と同じことをすればよい．

あるいは次のように示すこともできる（テキストの証明）：まず $\text{Ker } f$ の基底 $\{v_1, \dots, v_s\}$ と $\text{Im } f$ の基底 $\{w_1, \dots, w_t\}$ をとる．各 w_j は $\text{Im } f$ の要素だから $f(x_j) = w_j$ となる $x_j \in V$ をとることができる．すると $\{v_1, \dots, v_s, x_1, \dots, x_t\}$ は V の基底になる．

問題

- 4-1 補題 4.1 の証明を完成させなさい．写像 f の線形性を用いるのはどこか．
- 4-2 補題 4.5 の証明を完成させなさい．写像 f の線形性を用いるのはどこか．
- 4-3 テキスト 112 ページ 4.10, 113 ページ 4.19, 4.20
- 4-4 例 4.4 の証明を完成させなさい．
- 4-5 次元定理 4.6 の結論の式に $\dim W$ が入っていないのはなぜか．
- 4-6 次元定理 4.6 の証明の概略（ここでは 2 つあげた）を完成させなさい（オプション）．

5 内積

実ベクトル空間の内積 これからしばらくは、スカラが実数の場合と複素数の場合を分けて考える．ここではまず実ベクトル空間の内積を考察する．

定義 5.1 (テキスト 117 ページ)．実ベクトル空間 V の内積 an inner product, a scalar product とは、 V の 2 つの要素 $a, b \in V$ に対して実数 (a, b) を与える対応の規則で、次を満たすものである：

- (I-1) 任意の $a, b \in V$ に対して $(a, b) = (b, a)$.
- (I-2) 任意の $a, b, c \in V$ に対して $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$.
- (I-3) 任意の $a \in V$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $(\lambda a, b) = \lambda (a, b)$.
- (I-4) 任意の $a \in V$ に対して $(a, a) \geq 0$, 等号が成り立つための必要十分条件は $a = \mathbf{o}$.

例 5.2 (標準内積)． \mathbb{R}^n のベクトル $a = {}^t[a_1, \dots, a_n]$, $b = {}^t[b_1, \dots, b_n]$ に対して

$$(a, b) := a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = {}^t a b$$

と定めると、これは \mathbb{R}^n の内積である．

実際、定義 5.1 の (I-1)–(I-3) は容易に示される．さらに、 $a = {}^t[a_1, \dots, a_n]$ に対して $(a, a) = (a_1)^2 + \dots + (a_n)^2 \geq (a_1)^2 \geq 0$. また $(a, a) = 0$ ならば、各番号 j に対して $0 = (a, a) \geq (a_j)^2 \geq 0$ だから、 $a_j = 0$ となり、 $a = \mathbf{o}$.

ここで定義された内積を \mathbb{R}^n の標準内積 the canonical inner product という*8．

例 5.3. ベクトル $x = {}^t[x_1, x_2]$, $y = {}^t[y_1, y_2] \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$(x, y) := x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2 = {}^t x \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} y$$

と定めると、 $(,)$ は \mathbb{R}^2 の内積を与える．

定義 5.1 の (I-1)–(I-3) はこの場合もやさしい．(I-4) は $x = {}^t[x_1, x_2]$ に対する次の式変形 (平方完成) からわかる：

$$(x, x) = (x_1)^2 - 2x_1 x_2 + 2(x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_2)^2.$$

一般に、ベクトル $x = {}^t[x_1, x_2]$, $y = {}^t[y_1, y_2] \in \mathbb{R}^2$ に対して実対称行列 A を用いて

$$\langle x, y \rangle := ax_1 y_1 + bx_1 y_2 + bx_2 y_1 + cx_2 y_2 = {}^t x A y \quad \left(A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right)$$

と定めると、 \langle , \rangle が \mathbb{R}^2 の内積を与えるための必要十分条件は $\det A > 0$ かつ $\text{tr } A > 0$ である．

例 5.4. たかだか k 次の多項式で表される関数からなるベクトル空間 \mathcal{P}^k (例 1.12 参照) の 2 つの要素 $f, g \in \mathcal{P}^k$ に対して

$$(f, g) := \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

とおくと、 $(,)$ は \mathcal{P}^k の内積を与える．

2012 年 11 月 1 日 (2012 年 11 月 8 日訂正)

*8 前期の線形代数学第一では $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ の標準内積を “ $a \cdot b$ ” と表したが、今回はテキストに合わせて “ (a, b) ” という記号を用いる． “ $\langle a, b \rangle$ ” もしばしば用いられる．

ベクトルの大きさ ベクトル空間 V に内積 (\cdot, \cdot) が与えられているとする。このとき、任意の $a \in V$ に対して (a, a) は負でない実数だから、負でない実数

$$(5.1) \quad \|a\| := \sqrt{(a, a)}$$

が定まる。これを (内積 (\cdot, \cdot) に関する) a の大きさ the length, the norm という。

命題 5.5. ベクトル空間 V に内積 (\cdot, \cdot) が与えられているとき、その内積に関するノルム $\|\cdot\|$ は次を満たす：

(N-1) 任意の $a \in V$ に対して $\|a\| \geq 0$ 、等号が成立するための必要十分条件は $a = o$ 。

(N-2) 任意の $a \in V$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$ 。

(N-3) 任意の $a, b \in V$ に対して $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ (三角不等式)

最初の 2 つの証明は容易だが、(N-3) は次の Schwartz の不等式 Schwartz' inequality を用いる：

補題 5.6 (Schwartz の不等式). ベクトル空間 V に内積 (\cdot, \cdot) が与えられているとき、

$$|(a, b)| \leq \|a\| \|b\|$$

が成り立つ。ただし $\|\cdot\|$ は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関するノルムである。

証明： $b = o$ の場合は結論の式の両辺ともが 0 となるので、 $b \neq o$ の場合のみ証明すればよい。これは $x := a - \frac{(a, b)}{\|b\|^2} b$ において $(x, x) \geq 0$ という式を良くみれば得られる。

直交性と角度 ベクトル空間 V に内積 (\cdot, \cdot) が与えられているとする。

定義 5.7. ベクトル $a, b \in V$ が直交する orthogonal であるとは、 $(a, b) = 0$ が成り立つことである。

とくに、零ベクトル o は任意のベクトルに直交する。

次に、補題 5.6 から、 $a, b (\neq o)$ に対して $-1 \leq \frac{(a, b)}{\|a\| \|b\|} \leq 1$ が成り立つことに注意すれば、

定義 5.8. 零ベクトルでない 2 つのベクトル a, b に対して

$$\angle(a, b) := \cos^{-1} \left(\frac{(a, b)}{\|a\| \|b\|} \right)$$

を a, b の成す角 the angle between a and b という*9。

複素ベクトル空間の内積 複素ベクトル空間では内積の定義が少し異なる：

定義 5.9 (テキスト 128 ページ). 複素ベクトル空間 V の内積 (あるいはエルミート内積 a Hermitian inner product) とは、 $a, b \in V$ に対して複素数 (a, b) を与える対応の規則で、次を満たすものである：

(CI-1) 任意の $a, b \in V$ に対して $(a, b) = \overline{(b, a)}$ 。

(CI-2) 任意の $a, b, c \in V$ に対して $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$ 。

(CI-3) 任意の $a \in V$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $(\lambda a, b) = \lambda (a, b)$ 。

(CI-4) 任意の $a \in V$ に対して $(a, a) \geq 0$ 、等号が成り立つための必要十分条件は $a = o$ 。

*9 \cos^{-1} は逆余弦関数 (ひょっとしたら \arccos と習ったかもしれない) で、その値は閉区間 $[0, \pi]$ 内にとる。

注意 5.10. • 条件 (CI-1) の右辺の $\bar{\cdot}$ は複素共役 complex conjugation を表している . この条件のみが定義 5.1 との違いであるが , これにより , $(a, \lambda b) = \bar{\lambda}(a, b)$ が成り立つことに注意しておく .

- 条件 (CI-4) の不等式は , (a, a) が実数であってさらに負でないことを表している . したがって $\|a\| := \sqrt{(a, a)}$ と定めるとこれは負でない実数で , 命題 5.5 がそのまま成り立つこともわかる . 証明には Schwartz の不等式 (補題 5.6) を用いる .
- 条件 (CI-2) の代わりに $(a, \lambda b) = \lambda(a, b)$ とする場合もある . むしろ物理学ではこちらの方が普通らしい . このときは $(\lambda a, b) = \bar{\lambda}(a, b)$ が成り立つ .

例 5.11. 複素数をスカラとする n 次元数ベクトル空間 \mathbb{C}^n の要素 $a = {}^t[a_1, \dots, a_n]$, $b = {}^t[b_1, \dots, b_n]$ に対して

$$(a, b) := {}^t a \bar{b} = a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_n \bar{b}_n$$

と定めるとこれは \mathbb{C}^n の内積を与える . この内積を \mathbb{C}^n の標準内積という .

問題

5-1 テキスト 117 ページ , 問 1, 問 2 .

5-2 例 5.2 を確かめなさい .

5-3 例 5.3 を確かめ , さらに , \mathbb{R}^2 の内積はこの形のものに限ることを示しなさい (ヒント : 与えられた内積 (\cdot, \cdot) に対して , \mathbb{R}^2 の標準基底 $\{e_1, e_2\}$ を用いて $a = (e_1, e_1)$, $b = (e_1, e_2)$, $c = (e_2, e_2)$ とおく .)

5-4 例 5.4 を確かめなさい .

5-5 補題 5.6 を示しなさい . ここで挙げた証明 (の概略) はテキスト 119 ページのものと同じことになっている . この証明の図形的な意味を考えなさい*¹⁰ .

5-6 補題 5.6 を用いて命題 5.5 の (N-3) を示しなさい . (ヒント : $(\|a\| + \|b\|)^2 - \|a + b\|^2$ を計算せよ .)

5-7 ベクトル空間 V の内積とそれに関するノルム $\|\cdot\|$ に対して , 次が成り立つことを示しなさい .

- $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2(a, b) + \|b\|^2$ (余弦定理)
- $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$ (中線定理)

さらに括弧内の名称との関係を考えなさい .

5-8 テキスト 119 ページ , 問 4 , テキスト 129 ページ 5.1, 5.2, 5.3, 5.5, 5.6, 5.8, 5.9.

5-9 $V = \mathcal{C}^0([-\pi, \pi])$ を閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された実数値連続関数全体が成すベクトル空間とし ,

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

と定めると (\cdot, \cdot) は V の内積を与える . 正の整数 m に対して $f_m(x) = \cos mx$, $g_m(x) = \sin mx$ で与えられる関数 f_m, g_m は V の要素と見なせる . さらに $f_0(x) = 1$ としておく .

- $m \neq n$ のとき , f_m と f_n , g_m と g_n はそれぞれ ($m \neq n$) は直交することを確かめなさい .
- f_m と g_n は直交することを確かめなさい .
- f_m, g_m の大きさを求めなさい .

(ヒント : 三角関数の合成公式を用いる)

*¹⁰ この証明の利点は , 複素ベクトル空間の内積に関する Schwarz の不等式の証明にも自動的になっていることである . テキスト 128 ページ , 下から 7 行目参照 .

6 正規直交系

ここでは、(実)ベクトル空間に内積 (\cdot, \cdot) が与えられているとする。

単位ベクトル ベクトル $v \in V$ が $\|v\| = 1$ を満たしているとき、 v を単位ベクトル a unit vector という。

例 6.1. \mathbb{R}^n に標準内積が与えられているとき、 \mathbb{R}^n の標準基底のそれぞれのベクトルは単位ベクトルである。

一般に $v \neq 0$ のとき、 $v/\|v\|$ は単位ベクトルである。これを v の正規化 normalization という。

正規直交系

定義 6.2. ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{a_1, \dots, a_n\}$ が正規直交系 an orthonormal system であるとは、

$$(a_i, a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

が成り立っていることである。 (δ_{ij}) はクロネッカーのデルタ記号 Kronecker's delta symbol.)

例 6.3. \mathbb{R}^n に標準内積 (\cdot, \cdot) が与えられているとき、 \mathbb{R}^n の標準基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ は正規直交系をなす。

例 6.4. $V = C^0([-\pi, \pi])$ を閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された実数値連続関数全体が成すベクトル空間とし、

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

と定めると (\cdot, \cdot) は V の内積を与える (問題 5-9 参照)。いま正の整数 m に対して

$$\begin{aligned} v_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & v_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, & v_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, & \dots, & v_m(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx, \\ w_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, & w_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, & \dots, & w_m(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx \end{aligned}$$

とおくと、 $\{v_0, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_m\}$ は内積 (\cdot, \cdot) に関して正規直交系をなす。

定理 6.5 (テキスト 120 ページ). 正規直交系は一次独立である。

証明: ベクトル空間 V の内積 (\cdot, \cdot) に関する正規直交系 $\{a_1, \dots, a_k\}$ をとる。いま $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$ とおき、この両辺と a_j ($j = 1, \dots, k$) との内積をとると、定義 6.2 から $\alpha_j = 0$ となる。

系 6.6. n 次元ベクトル空間 V の内積 (\cdot, \cdot) に関する正規直交系 $\{a_1, \dots, a_n\}$ は V の基底である。

証明: 定理 6.5 と問題 2-3 からすぐわかる。

直交化

定理 6.7 (Gram-Schmidt の直交化; テキスト 121 ページ). ベクトル空間 V の一次独立なベクトルの組 $\{a_1, \dots, a_k\}$ に対して、内積 (\cdot, \cdot) に関する正規直交系 $\{v_1, \dots, v_k\}$ で

$$\langle a_1 \rangle = \langle v_1 \rangle, \quad \langle a_1, a_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle, \quad \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \quad \dots, \quad \langle a_1, \dots, a_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

を満たすものが存在する。ただし $\langle \dots \rangle$ は \dots が生成する V の部分空間を表す。

証明. *11 次のようにして, 帰納的にベクトルの列 b_j ($j = 1, \dots, k$) を定義する.

$$(*) \quad b_1 := a_1, \quad b_j := a_j - \frac{(a_j, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_j, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 - \dots - \frac{(a_j, b_{j-1})}{(b_{j-1}, b_{j-1})} b_{j-1} \quad (j = 2, \dots, k).$$

この帰納的定義によって b_j が決まるためには b_1, \dots, b_{j-1} が零ベクトルであってはならない. 実際, $\{a_j\}$ は基底だから $b_1 = a_1 \neq o$. したがって $b_2 = a_2 - (a_2, b_1) b_1 / (b_1, b_1)$ とおくことができ, さらに $b_1 = a_1$ と b_2 は一次独立だから, $b_2 \neq o$ で, さらに $(b_2, b_1) = 0$ であることはすぐにわかる (確かめよ). 以下, $b_3, b_4, \dots (\neq o)$ を (*) によって定義すると $\{b_1, \dots, b_k\}$ は互いに直交する (確かめよ). そこで $v_j = b_j / \|b_j\|$ ($j = 1, \dots, n$) とすればそれが求めるものである. \square

定義 6.8. ベクトル空間 V の基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ が正規直交系であるとき, これを正規直交基底 an orthonormal basis という.

命題 6.9. ベクトル空間 V の, 内積 (\cdot, \cdot) に関する正規直交基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ が与えられているとき, 任意の x は次のように表すことができる: $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. ただし, $x_j = (x, v_j)$ ($j = 1, \dots, n$).

系 6.10. 内積が与えられた有限次元ベクトル空間には正規直交基底が存在する.

証明: 有限次元ベクトル空間 V の基底 $\{a_1, \dots, a_n\}$ に Gram-Schmidt の正規直交化を施せばよい.

例 6.11. 実数 θ と $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ に対して \mathbb{R}^3 のベクトルを

$$a_1 = {}^t[\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \sin \varphi], \quad a_2 = {}^t[-\cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi], \quad a_3 = {}^t[\sin \theta, -\cos \theta, 0]$$

のようにとると $\{a_1, a_2, a_3\}$ は \mathbb{R}^3 の正規直交基底である.

例 6.12. たかだか 3 次の多項式で表される関数が成すベクトル空間 \mathcal{P}^3 (例 1.12) に 2 つの内積

$$(f, g) := \int_0^1 f(x) g(x) dx \quad \langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$$

を与える (例 5.4 参照). このとき, \mathcal{P}^3 の基底 $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ ($f_j(x) = x^j$) に対して Gram-Schmidt の直交化を施し, $(\cdot, \cdot), \langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する正規直交基底を作ることができる.

直交補空間

定義 6.13. ベクトル空間 V に内積 (\cdot, \cdot) が与えられているとする. V の部分空間 W に対して,

$$W^\perp := \{v \in V \mid (v, w) = 0 \text{ が全ての } w \in W \text{ に対して成り立つ}\}$$

を W の直交補空間 the orthogonal complement of W という.

命題 6.14. ベクトル空間 V の部分空間 W の直交補空間 W^\perp は

- V の部分空間である.
- 共通部分 $W \cap W^\perp$ は零ベクトルのみからなる: $W \cap W^\perp = o$.

証明: 前半は演習. 後半: $v \in W \cap W^\perp$ とすると, $v \in W$ かつ $v \in W^\perp$ だから $(v, v) = 0$ なので $v = o$.

*11 定理 6.7 は実際に v_1, \dots, v_k を構成する方法, すなわち証明が重要.

以下, V を有限次元ベクトル空間, W をその部分空間とする.

命題 6.15. • $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

- 任意の v は $v = v_1 + v_2$ ($v_1 \in W, v_2 \in W^\perp$) の形にただひとつ通りに表すことができる.

証明: 前半: $\dim W = m$ とし, $\{a_1, \dots, a_m\}$ を W の正規直交基底とする. すると任意の $w \in W$ は $w = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m$ と $\{a_j\}$ の線形結合で表されるから, $(v, w) = 0$ が成り立つための必要十分条件は $\alpha_1 (v, a_1) + \dots + \alpha_m (v, a_m) = 0$ となることである. したがって $v \in W^\perp$ であるための必要十分条件は $(v, a_j) = 0$ ($j = 1, \dots, m$) が成り立つことである. このことに注意して, 線形写像

$$F: V \ni v \mapsto \begin{bmatrix} (v, a_1) \\ \vdots \\ (v, a_m) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \text{を考えると} \quad W^\perp = \text{Ker } F.$$

いま, $F(a_j) = e_j$ ($j = 1, \dots, m$) が成り立つので $\text{Im } F = \langle e_1, \dots, e_m \rangle = \mathbb{R}^m$ なので, 次元定理 4.6 から

$$\dim W^\perp = \dim \text{Ker } F = \dim V - \dim \text{Im } F = \dim V - m = \dim V - \dim W.$$

後半: $\{b_1, \dots, b_{n-m}\}$ を W^\perp の基底とする. ただし $n = \dim V$. すると, $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_{n-m}\}$ は V の基底となる (確かめよ). したがって, 任意の v は $\{a_j\}$ の線形結合 (W の要素) と $\{b_i\}$ の線形結合 (W^\perp の要素) の和で表される. さらに $v = v_1 + v_2 = w_1 + w_2$ ($v_1, w_1 \in W, v_2, w_2 \in W^\perp$) とふた通りに表されたとする. $v_1 - w_1 = w_2 - v_2$. 左辺は W の要素, 右辺は W^\perp の要素だから, 命題 6.14 から $v_1 - w_1 = w_2 - v_2 = 0$, すなわち $v_1 = w_1, v_2 = w_2$ となり, この形の表し方がただひとつであることがわかった.

定義 6.16. 有限次元ベクトル空間 V に内積 (\cdot, \cdot) が定義されているとき, W を V の部分空間とすると, ベクトル $v \in V$ は $v = v_1 + v_2$ ($v_1 \in W, v_2 \in W^\perp$) とひとつ通りに表される. この v_1 を v の W への正射影または直交射影 the orthotongal projection という.

例 6.17. 例 4.3 の状況を考える:

$$f: \mathbb{R}^5 \ni x \mapsto f(x) = Ax \in \mathbb{R}^4 \quad \left(A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

とし, $W := \text{Ker } f$ とおくと, $W = \langle x_1, x_2 \rangle$ となる. ただし $x_1 = {}^t[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0]$, $x_2 = {}^t[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, -1, 1]$. これらは一次独立だから, とくに $\{x_1, x_2\}$ は W の基底となる.

以下, \mathbb{R}^5 には標準内積 (\cdot, \cdot) が与えられているとする. このとき $\{x_1, x_2\}$ に Gram-Schmidt の直交化を施すと, W の正規直交基底 $\{v_1, v_2\}$ が得られる. ただし $v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} {}^t[-1, 1, 2, 0, 0]$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} {}^t[-1, -1, 0, -2, 2]$. 一方,

$$W^\perp = \text{Ker } g, \quad g(x) = \begin{bmatrix} (x_1, x) \\ (x_2, x) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} x$$

なので, W^\perp の基底, とくに正規直交基底 $\{u_1, u_2, u_3\}$ を求めることができる (演習問題. 検算は簡単. $\dim W^\perp = 3$ だから, 基底は 3 本のベクトルからなる. これが x_1, x_2 に直交する正規直交系をなしていることを確かめればよい.)

ベクトル $v = {}^t[1, 1, 1, 1, 1]$ の W への正射影を求めよう. v を W の正規直交基底 $\{v_1, v_2\}$ と W^\perp の $\{u_1, u_2, u_3\}$ の線形結合で表した時の v_1, v_2 の線形結合の部分が正射影だから,

$$(v, v_1) v_1 + (v, v_2) v_2 = \frac{2}{15} {}^t[-1, 4, 5, 3, -3]$$

となる.

問題

- 6-1 テキスト 129 ページ 5.4; 130 ページ 5.7, 5.11, 5.12, 5.13; 131 ページ 5.16.
- 6-2 例 6.3 に出てくる言葉の定義がきちんと言えるか.
- 6-3 定理 6.7 の証明で与えた $\{v_j\}$ が本当に定理の結論を満たしていることを確かめなさい.
- 6-4 補題 6.9 を示しなさい.
- 6-5 例 6.12 の \mathcal{P}^3 の $(,)$ に関する正規直交基底と \langle, \rangle に関する正規直交基底をそれぞれ求めなさい. また, $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ をそれらの基底の線形結合で表しなさい.
- 6-6 命題 6.14 の前半を示しなさい.
- 6-7 例 6.17 を確かめなさい. また, 同様の問題を自分で作ってみなさい.
- 6-8 有限次元ベクトル空間 V に内積 $(,)$ が与えられているとき, 単位ベクトル e が生成する部分空間 $W = \langle e \rangle$ を考える. ベクトル $a \in V$ をひとつとって固定し, $x(t) = a - te$ の大きさが最小になる t の値を求めなさい. さらに, そのときの te は a の W への正射影, $x(t)$ は a の W^\perp への正射影となることを確かめなさい.
- 6-9 問題 6-8 を, W の次元を上げて考えなさい. すなわち W の正規直交基底 $\{e_1, \dots, e_k\}$ をとり,

$$x(t_1, \dots, t_k) = a - t_1 e_1 - \dots - t_k e_k$$

の大きさが最小になる (t_1, \dots, t_k) を求め, 問題 6-8 と同じような結論が成り立つかどうかを考えなさい. (多変数関数の極値問題は扱ったことがありますか?)

7 直交行列・ユニタリ行列

転置行列と随伴行列 行列 $A = [a_{ij}]$ に対して, (i, j) 成分が a_{ji} となるような行列を A の転置行列 the transposition of A といって tA と書く^{*12}. また, 複素数を成分とする行列 A の各成分の共役をとったものの転置行列を A の随伴行列 the adjoint matrix of A といって, A^* と書く: $A^* = \overline{{}^tA}$.

前期に学んだように, 行列の積の転置, 随伴行列は次の性質がある:

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA, \quad (AB)^* = B^* A^*.$$

転置行列と内積 ここでは $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ には標準的な内積 (\cdot, \cdot) が与えられているとする (例 5.2, 5.11):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n & \quad \text{に対して} & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}, \\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n & \quad \text{に対して} & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= {}^t\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

とくに, A を実数 (resp. 複素数) を成分とする n 次正方行列とすると, 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\in \mathbb{C}^n$) に対して

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, {}^tA\mathbf{y}) \quad (\text{resp. } (A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^*\mathbf{y}))$$

を満たす^{*13}.

定義 7.1. 正方行列 X が ${}^tX = X$ (resp. $X^* = X$) を満たすとき, X を対称行列 a symmetric matrix (resp. エルミート行列 a Hermitian matrix, または自己随伴行列 a self adjoint matrix) という.

補題 7.2. 実数 (resp. 複素数) を成分とする n 次正方行列 S が対称行列 (resp. エルミート行列) であるための必要十分条件は, 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (resp. \mathbb{C}^n) に対して $(S\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, S\mathbf{y})$ を満たすことである. ただし (\cdot, \cdot) は \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n) の標準内積である.

直交行列

定義 7.3. 実数を成分とする n 次正方行列 A が ${}^tAA = I$ を満たすとき, A を直交行列 an orthogonal matrix という. また, 複素数を成分とする n 次正方行列 A が $A^*A = I$ を満たすとき, A をユニタリ行列 a unitary matrix という.

命題 7.4 (直交行列の性質). (1) 直交行列の積は直交行列である.

(2) 直交行列 A の逆行列は tA であり, これもまた直交行列である.

(3) 直交行列の行列式は 1 または -1 である.

(4) 行列 $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$ ($\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n$) が直交行列であるための必要十分条件は $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ が \mathbb{R}^n の標準内積に関する正規直交基底となることである.

(5) 行列 A が n 次直交行列であるとき, 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が成り立つ. ただし (\cdot, \cdot) は \mathbb{R}^n の標準内積である.

2012年11月15日(2012年11月22日訂正)

^{*12} A^T, A^\top などと書くことも多い.

^{*13} ここで resp. は respectively の略. この文は2つの文をまとめたもので, 1つは括弧内を取り除いた文, もうひとつは, “実数”, “ \mathbb{R}^n ”, 式の前半をそれぞれ (respectively) “複素数”, “ \mathbb{C}^n ”, 式の後半に置き換えた文である.

例 7.5. 1 次の直交行列は $[1], [-1]$ である .

例 7.6. 2 次の直交行列は , 次のいずれかの形に書ける :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}.$$

ただし θ は実数 .

正規直交基底と直交行列 再び一般のベクトル空間を考える . 実数をスカラとする n 次元ベクトル空間 V に内積 $(,)$ が与えられているとき , この内積に関する正規直交基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ をひとつ固定しておく .

すると , V の任意の基底 $\{a_1, \dots, a_n\}$ に対して

$$[a_1, \dots, a_n] = [v_1, \dots, v_n]A$$

を満たす n 次正則行列 A が存在する (講義資料 3, 3.2 参照) . このとき , $\{a_1, \dots, a_n\}$ が正規直交基底であるための必要十分条件は , A が直交行列となることである .

実際 , $A = [a_{ij}]$ とおくと , $a_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j$. したがって

$$(a_k, a_l) = \left(\left(\sum_{i=1}^n a_{ki}v_i \right), \left(\sum_{j=1}^n a_{lj}v_j \right) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ki}a_{lj}(v_i, v_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ki}a_{lj}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ki}a_{li}.$$

ただし , δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号 . この右辺は tAA の (k, l) 成分 . ここで $\{v_j\}$ が正規直交基底であることは $(a_k, a_l) = \delta_{kl}$ と同値 . これは ${}^tAA = I$ と同値である .

問題

7-1 補題 7.2 を示しなさい .

7-2 命題 7.4 を示しなさい . さらに (3) の逆が成り立たないことを確かめなさい .

7-3 \mathbb{C}^n の標準内積 , ユニタリ行列に対して命題 7.4 に対応する命題を述べ , 証明しなさい . とくにユニタリ行列の行列式の値はどうなるか .

7-4 例 7.6 を確かめなさい .

7-5 3 次の直交行列で , 成分が 9 つすべて 0 でないものをひとつあげなさい .

7-6 ここでは $(,)$ を \mathbb{R}^2 の標準内積とする . X を 2 次の対称行列 ,

$$v(t) := \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad w(t) := \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad F(t) := (Xv(t), v(t))$$

とおく . F は周期 2π をもつ周期関数だから , 区間 $[0, 2\pi)$ で最大値 , 最小値をとる . このとき , 次を確かめなさい :

- $F'(t) = 2(Xv(t), w(t))$ である . ただし $' = d/dt$.
- F が最小値をとるような t の値を t_1 とすると , $Xv(t_1)$ は $v(t_1)$ と 1 次従属 . したがって $Xv(t_1) = \lambda v(t_1)$ となる実数 λ が存在する .
- 上の t_1 に対して $Xw(t_1) = \mu w(t_1)$ となる実数 μ が存在する .
- $P = [v(t_1), w(t_1)]$ は行列式が 1 の直交行列である .
- tPXP は対角行列で , その対角成分は λ, μ である .

8 固有値・固有ベクトル・対角化

固有値 ここではしばらくの間、とくにことわりのない限りスカラを複素数としておく。

定義 8.1. 複素数を成分とする n 次正方行列 A に対して関係式

$$Ax = \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}^n, x \neq o)$$

が成り立っているとき、スカラ λ を A の固有値 an eigenvalue, x を A の固有値 λ に関する固有ベクトル an eigenvector with respect to the eigenvalue λ という。

命題 8.2. スカラ λ が正方行列 A の固有値であるための必要十分条件は $\det(A - \lambda I) = 0$ が成り立つことである。ただし I は単位行列。

証明： 関係式 $Ax = \lambda x$ は $(A - \lambda I)x = o$ と書き換えられる。これを満たす零ベクトルでないベクトル x が存在するための必要十分条件は $A - \lambda I$ が正則行列でないことである（補題 2.15 参照）。

ここで n 次正方行列 A に対して、

$$(8.1) \quad f_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$$

とおくと、これは λ の n 次の多項式で、とくに λ^n の係数は $(-1)^n$ である。これを A の固有多項式、特性多項式 the characteristic polynomial という。固有値は f_A の根であるが、その重複度（注意 8.11 参照）を固有値の重複度 multiplicity という。命題 8.2 と代数学の基本定理 8.10 より

系 8.3. 複素数を係数とする n 次正方行列は、複素数の固有値を重複度も含めてちょうど n 個持つ。

命題 8.4. 正方行列 A と正則行列 P に対して $f_{P^{-1}AP} = f_A$ が成り立つ。とくに $P^{-1}AP$ と A の固有値は重複度を含めて一致する。

固有ベクトルの一次独立性

命題 8.5. 正方行列 A の互いに相異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ に関する固有ベクトル x_1, \dots, x_k は一次独立。

証明： スカラ s_1, \dots, s_k に対して $s_1 x_1 + \dots + s_k x_k = o$ が成り立っているとす。この等式の両辺に A を左からかけて、固有ベクトルの定義 $Ax_j = \lambda_j x_j$ を用いると $s_1 \lambda_1 x_1 + \dots + s_k \lambda_k x_k = o$ が得られる。この式に更に A をかけると $s_1 \lambda_1^2 x_1 + \dots + s_k \lambda_k^2 x_k = o$, これをつづけて

$$s_1 \lambda_1^l x_1 + \dots + s_k \lambda_k^l x_k = o \quad (l = 0, \dots, k-1)$$

が得られる。これをまとめると

$$[x_1, \dots, x_k]SV = O \quad \left(S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_k \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix} \right)$$

が得られる。とくに λ_j は互いに異なるスカラなので、命題 8.9 から V は正則行列。したがって、上の式の両辺に V^{-1} を右からかけると $[x_1, \dots, x_k]S = O$ 。すなわち $s_1 x_1 = o, \dots, s_k x_k = o$ が成り立つ。ここで、固有ベクトル x_j は零ベクトルでないから $s_1 = s_2 = \dots = s_k = 0$ を得る。

対角化 正方行列 $A = [a_{ij}]$ の (i, i) -成分を対角成分 the diagonal components というのであった．とくに，対角成分以外のすべての成分が 0 であるような正方行列を対角行列 a diagonal matrix という．対角成分が 1 行目から順に t_1, \dots, t_n であるような n 次対角行列を

$$\text{diag}[t_1, \dots, t_n] := \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_n \end{bmatrix}$$

と表すこともある．

正方行列 A を対角化する to diagonalize とは，正則行列 P を選んで

$$(8.2) \quad P^{-1}AP = \Lambda \quad (\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n])$$

の形にすることである．

命題 8.6. 正方行列 A が (8.2) のように対角化されているならば， λ_j は A の固有値で， P の第 j 列は A の固有値 λ_j に対する固有ベクトルである．とくに $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ は A の固有値と重複度を含めて一致する．

証明：式 (8.2) を $AP = P\Lambda$ と書き換え， $P = [p_1, \dots, p_n]$ と分解して $p_j \neq 0$ (なぜか) に注意すればよい．後半は命題 8.4 から得られる．

注意 8.7. 任意の正方行列が対角化できるわけではない．実際

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

は対角化できない．

定理 8.8. 正方行列 A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ がすべて固有多項式の単根であるとする．このとき， A は対角化可能である．

証明：各 λ_j に対する固有ベクトル p_j をとり， $P := [p_1, \dots, p_n]$ とおくと，固有値が互いに相異なることと命題 8.5 から P は正則．さらに $Ap_j = \lambda_j p_j$ なので $AP = P\Lambda$ ($\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$) である．

固有多項式が重根を持つ場合は次回以降に扱う．

復習 今回用いたいくつかの事実を復習しておく．

命題 8.9 (Vandermonde の行列式). スカラ a_1, \dots, a_k ($k \geq 2$) に対して

$$V(a_1, \dots, a_k) := \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{k-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_k & a_k^2 & \dots & a_k^{k-1} \end{bmatrix} \quad \text{とおくと} \quad \det(V(a_1, \dots, a_k)) = \prod_{i < j} (a_j - a_i)$$

が成り立つ．ここで右辺は $1 \leq i < j \leq k$ を満たす組 (i, j) 全てについて積をとることを表している．とくに $V(a_1, \dots, a_k)$ が正則行列であるための必要十分条件は a_1, \dots, a_k が互いに異なることである．

証明：行列のサイズ k に関する数学的帰納法による．

$$\det(V(a_1, a_2)) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

なので, $k = 2$ のとき結論は正しい.

いま, $k \geq 2$ が与えられ, 任意のスカラー $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$

$$\det(V(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})) = \prod_{i < j} (\alpha_j - \alpha_i)$$

が成り立っているとす. このとき, スカラー a_1, \dots, a_k に対して $V := V(a_1, \dots, a_k)$ とおき, その第 l 行 ($l = 2, \dots, k$) から第 1 行をそれぞれ引くと,

$$\begin{aligned} \det V &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{k-1} \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \dots & a_2^{k-1} - a_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_k - a_1 & a_k^2 - a_1^2 & \dots & a_k^{k-1} - a_1^{k-1} \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_k - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{k-1} \\ 0 & 1 & a_2 + a_1 & \dots & a_2^{k-2} + a_2^{k-3}a_1 + \dots + a_1^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a_k + a_1 & \dots & a_k^{k-2} + a_k^{k-3}a_1 + \dots + a_1^{k-2} \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_k - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & \dots & a_2^{k-2} + a_2^{k-3}a_1 + \dots + a_1^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_k + a_1 & \dots & a_k^{k-2} + a_k^{k-3}a_1 + \dots + a_1^{k-2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

この最後の行列式をとっている行列を $V' := [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{k-1}]$ と列ベクトルに分解し,

$$\mathbf{b}'_1 = \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{b}'_2 = \mathbf{b}_2 - a_1 \mathbf{b}'_1, \quad \mathbf{b}'_3 = \mathbf{b}_3 - a_1 \mathbf{b}'_2 - a_1^2 \mathbf{b}'_1, \quad \dots, \quad \mathbf{b}'_{k-1} = \mathbf{b}_{k-1} - a_1 \mathbf{b}'_{k-2} - a_1^2 \mathbf{b}'_{k-3} - \dots - a_1^{k-2} \mathbf{b}'_1$$

とおけば,

$$\det V' = \det[\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{k-1}] = \det(V(a_2, a_3, \dots, a_k))$$

となるので, 数学的帰納法の仮定から結論が得られる.

前期に以下の定理を紹介した. 証明はこの講義の範囲を超えるのでここでは述べない.

定理 8.10 (代数学の基本定理). 複素数 a_0, \dots, a_n ($n \neq 0$) を係数とする多項式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

は複素数の根をもつ. とくに $f(x)$ は

$$(8.3) \quad f(x) = a_n (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n) \quad (\lambda_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, n)$$

の形に因数分解される.

注意 8.11. 式 (8.3) に現れる根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ のうち, 同じものをまとめて

$$f(x) = a_n (x - \lambda_{j_1})^{k_1} (x - \lambda_{j_2})^{k_2} \dots (x - \lambda_{j_m})^{k_m} \quad (k_1 + \dots + k_m = n)$$

とおく. ただし k_l は正の整数, $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_m}$ は互いに異なる複素数である. このように表したとき, k_l を根 λ_{j_l} の重複度 the multiplicity という. とくに, 重複度 1 の根を単根 a simple root, 重複度 2 以上の根を重根 a multiple root という.

問題

8-1 命題 8.4 を示しなさい .

8-2 命題 8.6 を示しなさい .

8-3 例 8.7 を確かめなさい . (ヒント : 固有値は 1 (重根) だから対角化されるとしたら $P^{-1}AP = I$.)

8-4 テキスト 135 ページ , 例 1 ; 136 ページ , 問 1, 例 2, 問 2 ; 156 ページ , 6.1 ; 157 ページ , 6.7, 6.8 ; 158 ページ , 6.18 (オプション) .

8-5 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & -9 & 8 & -5 \\ -4 & -11 & 9 & -7 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

に対して

- A の固有多項式 f_A を求めなさい .
- A の固有値を求めなさい .
- A のそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを一つずつ求めなさい . (ヒント : 固有値を λ とするとき , 同次連立 1 次方程式 $(A - \lambda I)x = o$ をとき , o でない解をひとつ選べば良い .
- $\Lambda = P^{-1}AP$ が対角行列になるような正方行列 P と , Λ をそれぞれひとつずつ求めなさい .

8-6 次の行列を対角化しなさい .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

ただし θ は実数である .

9 三角化

ユニタリ行列 複素数を成分とする n 次正方行列 U がユニタリ行列 a unitary matrix であるとは, $U^*U = I$ が成り立つことである. ここで $U^* = {}^t\bar{U}$ は U の随伴行列 (共役転置行列) である. ユニタリ行列 U は正則で, その逆行列 $U^{-1} = U^*$ もまたユニタリである. また, ユニタリ行列の積はユニタリである.

いま \mathbb{C}^n の標準内積 $(x, y) = {}^t x \bar{y}$ を考えると, 正方行列 $U = [x_1, \dots, x_n]$ ($x_j \in \mathbb{C}^n$) がユニタリ行列であるための必要十分条件は $\{x_1, \dots, x_n\}$ が正規直交系となること ($(x_j, x_k) = \delta_{jk}$) である.

三角化 正方行列 $D = [d_{ij}]$ が上三角行列 an upper triangular matrix であるとは, $i > j$ を満たす各添字 (i, j) に対して $d_{ij} = 0$ が成り立つこと, すなわち “対角成分の下側の成分がすべて 0” となることである.

命題 9.1. 上三角行列の固有値は, その対角成分と重複度を含めて一致する.

証明: 上三角行列 D の対角成分を順に $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とする. このとき $D - \lambda I$ はまた上三角行列で, その対角成分は $\lambda_1 - \lambda, \dots, \lambda_n - \lambda$ であるから, D の固有多項式は $f_D(\lambda) = \det(D - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$ となる.

定理 9.2. 任意の正方行列 A はユニタリ行列によって上三角化することができる. すなわち, ユニタリ行列 U をうまくとって $U^{-1}AU = D$ (D は上三角行列) とすることができる.

証明: 行列のサイズ n に関する数学的帰納法を用いる. 1 次正方行列はつねに上三角であるから, $n = 1$ の場合に結論は正しい.

いま, 与えられた正の整数 $n \geq 2$ に対して, 任意の $n - 1$ 次正方行列がユニタリ行列によって上三角化されると仮定し, n 次正方行列 A がユニタリ行列で上三角化できることを示そう: 行列 A の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $x_1 \in \mathbb{C}^n$ を λ_1 に関する固有ベクトルとする. とくに $x_1 \neq o$ なので, 正規化して $\|x_1\| = 1$ としておく.

いま, 直交補空間 $W := \langle x_1 \rangle^\perp$ を考えるとこれは \mathbb{C}^n の $n - 1$ 次元部分空間である*14. そこで W の正規直交基底*15を $\{x_2, \dots, x_n\}$ とすると, $\{x_1, \dots, x_n\}$ は \mathbb{C}^n の正規直交基底となる (確かめよ). したがって, $P := [x_1, \dots, x_n]$ とするとこれはユニタリ行列で, $P^{-1}AP = D$ とすると, $AP = PD$ なので D の第一列 v は $Ax_1 = Pv$ を満たす. ここで x_1 は A の固有値 λ_1 に関する固有ベクトルだから $v = {}^t[v_1, \dots, v_n]$ と書けば

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 = Pv = v_1 x_1 + \dots + v_n x_n.$$

したがって, $\{x_1, \dots, x_n\}$ の一次独立性から $v_1 = \lambda_1, v_2 = \dots = v_n = 0$. すなわち $P^{-1}AP$ は次のように書ける:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \dots * \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{bmatrix} \quad (B \text{ は } n - 1 \text{ 次の正方行列}).$$

ここで, 帰納法の仮定から, $Q'^{-1}BQ'$ が上三角行列となるような $n - 1$ 次ユニタリ行列 Q' が存在する. そこで

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & Q' \\ 0 & \end{bmatrix} \quad \text{とすると} \quad Q^{-1}P^{-1}APQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \dots * \\ 0 & \\ \vdots & Q'^{-1}BQ' \\ 0 & \end{bmatrix} \quad \text{は上三角.}$$

ここで $U := PQ$ とおけばこれはユニタリ行列で結論を満たす.

2012 年 11 月 29 日

*14 命題 6.15. ここではスカラーを \mathbb{R} としているが \mathbb{C} としても全く同様のことが成り立つ.

*15 正規直交系の存在は定理 6.7. ここでも証明は実ベクトル空間に対して与えているが, 複素ベクトル空間でも全く同様.

以下、三角化可能性の（理論的）応用をいくつかあげる：

正規行列の対角化可能性

定義 9.3. 正方行列 A が正規行列 a normal matrix であるとは、 $A^*A = AA^*$ が成り立つことである。

例 9.4. ● 対角行列は正規行列である。

- 行列 A がエルミート行列、すなわち $A^* = A$ を満たすならば正規行列である。とくに、実数を成分とする対称行列は正規行列である。
- 行列 A が歪エルミート行列（わいえるみーと） a skew hermitian matrix であるとは $A^* = -A$ が成り立つことである。とくに実数を成分とする歪エルミート行列、すなわち ${}^tA = -A$ 満たす実行列を交代行列 a skew symmetric matrix という。歪エルミート行列、(実) 交代行列は正規行列である。
- ユニタリ行列は正規行列である。実際、ユニタリ行列 A に対して $A^* = A^{-1}$ だから $AA^* = A^*A = E$ 。

補題 9.5. 上三角行列が正規行列であるための必要十分条件は、それが対角行列となることである。

証明：十分性は例 9.4 でみたので必要性を示す。 n 次の上三角行列 $A = [a_{ij}]$ が正規行列であるとする。このとき AA^* と A^*A の (i, i) 成分を比較して、 $i > j$ のとき $a_{ij} = 0$ であること（上三角）に注意すれば

$$(*) \quad \sum_{l=1}^n a_{il}\bar{a}_{il} = \sum_{l=1}^n a_{li}\bar{a}_{li} \quad \text{すなわち} \quad \sum_{l=i+1}^n a_{il}\bar{a}_{il} = \sum_{l=1}^{i-1} a_{li}\bar{a}_{li}$$

が成り立つことがわかる。式 (*) の $i = 1$ の場合から

$$\sum_{l=2}^n a_{1l}\bar{a}_{1l} = 0 \quad \text{すなわち} \quad a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = 0$$

を得る。さらに (*) の $n = 2$ の場合から

$$\sum_{l=3}^n a_{2l}\bar{a}_{2l} = \sum_{l=1}^1 a_{12}\bar{a}_{12} = a_{12}\bar{a}_{12} = 0 \quad \text{すなわち} \quad a_{23} = \cdots = a_{2n} = 0.$$

これを繰り返して $a_{ij} = 0$ ($i < j$) が得られるので A は対角行列。

定理 9.6. 行列 A がユニタリ行列で対角化されるための必要十分条件は A が正規行列となることである。

証明：必要性：ユニタリ行列 U で $U^{-1}AU = \Lambda$ (Λ は対角行列) となっているとする。 U がユニタリだから $U^{-1} = U^*$ なので、 $U^*AU = \Lambda$ 。この共役転置行列をとると $U^*A^*U = \Lambda^*$ 。ここで、対角行列 Λ が正規であることから A が正規行列であることがわかる（確かめよ）。

十分性：定理 9.2 より、ユニタリ行列 U で $U^*AU = D$ (D は上三角) となるものがとれる。ここで A は正規なので $DD^* = U^*AA^*U = U^*A^*AU = D^*D$ となり D は正規。したがって、補題 9.5 から D は対角行列。

とくに、対称行列・エルミート行列の対角化は応用上重要なので、次回扱う。

固有空間とその次元 一般に n 次正方行列 A の固有値 λ に対して

$$(9.1) \quad W_\lambda := \{x \in \mathbb{C}^n; Ax = \lambda x\}$$

は \mathbb{C}^n の部分空間である。実際 W_λ は行列 $A - \lambda I$ であらわされる \mathbb{C}^n の線形変換の核 kernel である（補題 4.1）。この W_λ を A の固有値 λ に対する固有空間 the eigenspace という。

行列 A の固有値 λ に関する固有ベクトルは W_λ の要素である。また W_λ の o でない要素は A の固有値 λ に関する固有ベクトルである。

補題 9.7. 行列 A と正則行列 P, Q に対して $\text{rank } A = \text{rank}(PAQ)$ が成り立つ.

証明: 行基本変形は正則行列を左からかけることと同じなので, $\text{rank } A = \text{rank}(PA)$. また A を (m, n) -型とするとき, 線形写像 $F: \mathbb{C}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{C}^m$ の像 $\text{Im } F$ の次元が $\text{rank } A$ である (例 4.4) が, AQ が定める線形写像の像は $\text{Im } F$ と一致するから (確かめよ) $\text{rank } AQ = \text{rank } A$.

定理 9.8. 正方行列 A の, 重複度 m をもつ固有値 λ に対する固有空間 W_λ の次元は 1 以上 m 以下である.

証明: 次元定理 4.6 (例 4.4) から, $\dim W_\lambda = n - \text{rank}(A - \lambda I)$ である. ただし A の次数を n とした. いま, A の固有値を $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, λ_1 の重複度を m とし $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$ とし, 定理 9.2 のように $U^{-1}AU = D$ (D は上三角行列で, その対角成分は順に $\lambda_1, \dots, \lambda_n$) としておく. ここで補題 9.7 から $\text{rank}(A - \lambda_1 I) = \text{rank } U^{-1}(A - \lambda_1 I)U = \text{rank}(D - \lambda_1 I)$ であるが $D - \lambda_1 I$ は上三角行列で, $m+1$ 行目以下の対角成分は 0 ではない. したがって $\text{rank}(D - \lambda_1 I) \geq n - m$ となり, 結論が得られる.

ケイリー・ハミルトンの定理 一般に x の多項式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

と正方行列 A に対して

$$f(A) := a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$$

と書く.

補題 9.9. 正方行列 A とスカラー λ, μ に対して $A - \lambda I$ と $A - \mu I$ は可換である:

$$(A - \lambda I)(A - \mu I) = (A - \mu I)(A - \lambda I).$$

定理 9.10 (Cayley-Hamilton). 正方行列 A の固有多項式を f_A とすると $f_A(A) = O$.

証明: 一般に, 多項式 f と正則行列 U に対して $f(U^{-1}AU) = U^{-1}f(A)U$ なので定理 9.2 から, A が上三角行列である場合を示せば良い (確かめよ).

以下, 上三角行列 D の対角成分を $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ と表すと $f_D(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$ である (命題 9.1). したがって

$$f_D(D) = (-1)^n (D - \lambda_1 I) \dots (D - \lambda_n I)$$

であるが, 補題 9.9 から右辺の積の順番は自由に入れ替えて良い. ここで $\{e_1, \dots, e_n\}$ を \mathbb{C}^n の標準基底とすると, D が上三角であることに気をつければ

$$(D - \lambda_1 I)e_1 = o, \quad k \geq l \text{ のとき} \quad (D - \lambda_k I)e_l \in \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle$$

が成り立つことがわかる. これを用いると

$$(D - \lambda_1 I)(D - \lambda_2 I) \dots (D - \lambda_k I)e_k = o$$

なので $f_D(D)e_k = o$ が各 k に対して成り立つ. したがって $f_D(D) = O$.

例 9.11. 2 次正方行列 A に対して $A^2 - (\text{tr } A)A + (\det A)I = O$.

固有多項式の係数

補題 9.12. 次数 n の正方行列 A と正則行列 P に対して

$$\det(P^{-1}AP) = \det A, \quad \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr } A$$

が成り立つ.

定理 9.13. n 次正方行列 A の固有値を (重複しているものはその重複度だけ並べることにして) $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ と書くと,

$$\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n, \quad \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

である.

証明: 補題 9.12 と定理 9.2 から, A が最初から上三角行列としてよい. 上三角行列の行列式とトレースはそれぞれ対角成分の積と和であるが, 命題 9.1 からそれらは全ての固有値の積と和である.

系 9.14. n 次正方行列 A の固有多項式を

$$f_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} \lambda^{n-1} - \dots + a_2 \lambda^2 - a_1 \lambda + a_0$$

と書くと,

$$a_{n-1} = \operatorname{tr} A, \quad a_0 = \det A$$

が成り立つ.

問題

- 9-1
- ユニタリ行列 U の逆行列は U^{-1} で, これもまたユニタリであることを確かめなさい.
 - ユニタリ行列の積はユニタリ行列であることを確かめなさい.
 - ユニタリ行列の行列式の値は絶対値が 1 の複素数であることを示しなさい.
 - 正方行列 $U = [x_1, \dots, x_n]$ ($x_j \in \mathbb{C}^n$) がユニタリ行列であるための必要十分条件は $\{x_1, \dots, x_n\}$ が \mathbb{C}^n の内積に関して正規直交系となること ($(x_j, x_k) = \delta_{jk}$) であることを確かめなさい.
 - 行列式が $e^{i\theta}$ (θ は実数) であるような 2 次のユニタリ行列は

$$e^{\frac{i\theta}{2}} \begin{bmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{bmatrix} \quad (p\bar{p} + q\bar{q} = 1)$$

の形をしていることを確かめなさい.

- 9-2 n 次正方行列 A の固有値を $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ とするとき, A^k (k は正の整数) の固有値は $\{(\lambda_1)^k, \dots, (\lambda_n)^k\}$ であることを示しなさい. (ヒント: $D := U^{-1}AU$ を上三角行列としておくと, $D^k = U^{-1}A^kU$ は A^k と同じ固有多項式をもつ).

- 9-3 n 次正方行列 A の固有値を $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ とする. x の多項式 $p(x)$ に対して行列 $p(A)$ の固有値は $\{p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)\}$ であることを示しなさい.

- 9-4 n 次正方行列 A が, ある番号 k に対して $A^k = O$ を満たすとする.

- A の固有値はすべて 0 であることを示しなさい.
- $A^n = O$ であることを示しなさい. (固有多項式が λ^n となることと Cayley-Hamilton の定理)

- 9-5 2 次正方行列 A が $\det A = 1$, $-2 < \operatorname{tr} A < 2$ を満たしているとする. このとき, $\operatorname{tr} A = 2 \cos \theta$ を満たす θ をとれば, 任意の正の整数 m に対して

$$A^m = \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} A - \frac{\sin(m-1)\theta}{\sin \theta} I$$

が成り立つことを示しなさい.

- 9-6 補題 9.12, 定理 9.13 を示しなさい.

10 対称行列の対角化

復習 ここでは、 \mathbb{C}^n に標準内積 (\cdot, \cdot) が与えられているとする： $x, y \in \mathbb{C}^n$ に対して $(x, y) = {}^t x \bar{y}$. このとき、任意の $x, y \in \mathbb{C}^n$ とスカラ $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$(\lambda x, y) = \lambda (x, y), \quad (x, \lambda y) = \bar{\lambda} (x, y)$$

が成り立つ . 一般に複素数を成分とする n 次正方行列 A と $x, y \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad (A^* = {}^t \bar{A})$$

が成り立つ .

エルミート行列と対称行列 複素数を成分とする正方行列 H がエルミート行列 a Hermitian matrix である、とは $H^* = H$ が成り立つことであった . 一方 H が対称行列 a symmetric matrix であるとは ${}^t H = H$ が成り立つことである .

この講義では、とくに断らない限り対称行列は成分が実数のもののみを考えることにする . すなわち、ここで扱う対称行列は成分が実数であるエルミート行列である . 対称行列の成分がとくに実数であることを明示する場合は実対称行列という語を用いる .

命題 10.1. エルミート行列の固有値は実数である . とくに実対称行列の固有値は実数で、対応する固有ベクトルとしてすべての成分が実数であるものが取れる .

証明：エルミート行列 H の固有値の一つを $\lambda \in \mathbb{C}$, 対応する固有ベクトルを $x \in \mathbb{C}^n$ とすと

$$(Hx, x) = (\lambda x, x) = \lambda (x, x) = \lambda \|x\|^2, \quad (Hx, x) = (x, H^* x) = (x, Hx) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda} \|x\|^2.$$

とくに $\|x\| \neq 0$ なので $\lambda = \bar{\lambda}$ を得る . したがって λ は実数である . とくに H が実対称行列の場合は、 $H - \lambda I$ は実行列なので、方程式 $(H - \lambda I)x = o$ は実数の範囲で解をもつ .

定理 10.2. エルミート行列はユニタリ行列により対角化される . とくに、実対称行列は (実) 直交行列により対角化される . すなわち、実対称行列 H に対して、直交行列 P で $P^{-1}HP = \Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$) となるものが存在する .

証明：前半は定理 9.6 の特別な場合 . 後半は、固有値が実数になること (命題 10.1) に注意して、(1) 定理 9.2 の証明をきちんとフォローすると与えられた行列が実直交行列によって上三角行列にすることができること、(2) 定理 9.6 の証明をこの場合に適用するとその上三角行列が実は対角行列なることからわかる .

系 10.3. n 次実対称行列 H の固有値 $\lambda (\in \mathbb{R})$ の重複度が m であるとき、 H の、固有値 λ に関する固有空間

$$W_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Hx = \lambda x\}$$

は \mathbb{R}^n の m 次元部分空間である .

証明：直交行列 P によって $P^{-1}AP = \Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ ($\lambda_1 = \dots = \lambda_m, j > m$ なら $\lambda_j \neq \lambda_1$) と対角化されているとする . 直交行列 P は正則なので

$$(H - \lambda_1 I)x = o \quad \Leftrightarrow \quad P(\Lambda - \lambda_1 I)P^{-1}x = o \quad \Leftrightarrow \quad (\Lambda - \lambda_1 I)P^{-1}x = o$$

であるが，対角行列 $\Lambda - \lambda_1 I$ は，最初の m 個の対角成分が 0 で，それから下は 0 でない．したがって

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid (\Lambda - \lambda_1 I)\mathbf{y} = \mathbf{o}\} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m \rangle \quad (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の標準基底})$$

なので，

$$W_\lambda = \langle P\mathbf{e}_1, \dots, P\mathbf{e}_m \rangle.$$

系 10.4. 実対称行列の，相異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する．

証明：直交行列で対角化可能であることを認めれば容易だが，直接証明することもできる：実対称行列 H の 2 つの固有値 λ, μ ($\lambda \neq \mu$) に対応する固有ベクトルをそれぞれ \mathbf{x}, \mathbf{y} とすると，

$$(H\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (H\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, H\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mu\mathbf{y}) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

ここで $\lambda \neq \mu$ なので $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

例題 実対称行列を直交行列で対角化するレシピ recipe はテキスト 151 ページ．

対称行列

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{とおくと} \quad P^{-1}HP = {}^tPHP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

問題

- 10-1 正方行列 A が $A^* = -A$ を満たすとき， A は歪エルミート行列 a skew Hermitian matrix という．とくに A が実行列のとき， ${}^tA = -A$ を満たす行列を交代行列 a skew symmetric matrix とよぶ．これらの行列の固有値はどんな数になるか．
- 10-2 ユニタリ行列，(実)直交行列の固有値はどんな値になるか．
- 10-3 3 次の実直交行列 A が $\det A = 1$ を満たしているとする．このとき， A の固有値のうち一つは 1 であることを示しなさい．(ヒント：固有多項式が実係数であることから， λ が固有値なら $\bar{\lambda}$ も固有値．さらに行列式の条件から，すべての固有値の積は 1; さらに一般化された命題が，テキスト 157 ページ 6.11.)
- 10-4 テキスト 151 ページ 例 12, 152 ページ 問 14, 156 ページ 6.5.

11 2次形式

今回は、スカラとして実数のみを考える。

2次形式と表現行列 変数 x_1, \dots, x_n に関する同次2次式

$$(11.1) \quad q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

を2次形式 a quadratic form という。式 (11.1) の右辺から $x_i x_j$ および $x_j x_i$ ($i \neq j$) の項を取り出すと、

$$a_{ij} x_i x_j + a_{ji} x_j x_i = (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} x_i x_j + \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} x_j x_i$$

となるので、 $b_{ij} := (a_{ij} + a_{ji})/2$ とおけば

$$(11.2) \quad q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j \quad (b_{ij} = b_{ji})$$

と表すことができる。これを行列の記法を用いて

$$(11.3) \quad q(\mathbf{x}) = {}^t \mathbf{x} B \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n], B = [b_{ij}])$$

と表すことができる。ここで、 $[b_{ij}]$ は (11.2) のようにとることにすれば、 B は対称行列である。この対称行列 B を、2次形式 q の表現行列 the representative matrix ということにする。

例 11.1. 一般に、2つの変数 x_1, x_2 に関する2次形式は

$$a(x_1)^2 + 2bx_1x_2 + c(x_2)^2 = {}^t \mathbf{x} B \mathbf{x} \quad \left(\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right)$$

とかける。

例 11.2. 点 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ を含む領域 D で定義された C^2 -級の関数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ と $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in D$ となる $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$(11.4) \quad f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a})\mathbf{h} + \frac{1}{2} {}^t \mathbf{h} H_f(\mathbf{a}) \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|^2) \quad (\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o})$$

が成り立つ。ただし \mathbb{R}^n の座標を $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ と表し、 \mathbf{h} は列ベクトルとみなしている。ここで、

$$df(\mathbf{a}) := \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right], \quad H_f(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{bmatrix},$$

$o(\cdot)$ は Landau の記号である (テイラーの定理 Taylor's formula の2次の場合)。とくに f が C^2 -級なので f のヘッセ行列 the Hessian matrix $H_f(\mathbf{a})$ は対称行列で、(11.4) の2次の項は \mathbf{h} の2次形式である。

2次形式と双線形形式 実数を成分とする n 次対称行列 A に対して

$$(11.5) \quad q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := {}^t\mathbf{x}A\mathbf{y} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n)$$

で定まる写像 $q: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を, 対称双線形形式 a symmetric bilinear form という. 対称双線形形式 (11.5) に対して

$$q(\mathbf{x}) := q(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

とおくと^{*16}, q は \mathbb{R}^n の 2 次形式である. これを, 対称双線形形式 (11.5) に対応する 2 次形式という.

例 11.3. \mathbb{R}^n の標準内積は, 単位行列 I に対応する対称双線形形式で, それに対応する 2 次形式は $\|\mathbf{x}\|^2$ である. 一般に \mathbb{R}^n の (標準とは限らない) 内積は対称双線形形式である.

2 次形式の標準形

命題 11.4. \mathbb{R}^n の 2 次形式 q に対して, ある行列 P と実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ で

$$q(\mathbf{x}) = \lambda_1(y_1)^2 + \dots + \lambda_n(y_n)^2 \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = P^{-1}\mathbf{x}$$

となるものが存在する. とくに $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は q の表現行列の固有値である.

証明: 対称行列 A を q の表現行列とする. すると, 命題 10.1 および定理 10.2 から

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$$

となるような直交行列 P と実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が存在する. 実際 $\{\lambda_j\}$ は A の固有値である. いま $\mathbf{y} := P^{-1}\mathbf{x} = {}^tP\mathbf{x}$ とおくと,

$$q(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = {}^t(P\mathbf{y})A(P\mathbf{y}) = {}^t\mathbf{y}({}^tPAP)\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \lambda_1(y_1)^2 + \dots + \lambda_n(y_n)^2.$$

問題

11-1 例 11.3 を確かめなさい.

11-2 次数 n の対称行列 A, B から定まる対称双線形形式

$$q_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{y}, \quad q_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t\mathbf{x}B\mathbf{y}$$

が一致するための必要十分条件は, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$q_A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = q_B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

が成り立つことである. これを確かめなさい.

(ヒント: 必要性はすぐにわかる. 十分性は $q_A(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = q_B(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y})$ をよく見れば示すことができる.)

11-3 テキスト 154 ページ, 例 14; 問 16, 158 ページ 6.17.

^{*16} とくに誤解の危険はないと思われるので, 同じ q の記号を用いる.

12 対角化の意味・応用

線形変換の表現行列 線形変換 $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ に対して $f(x) = Ax$ ($x \in \mathbb{C}^n$) となる n 次正方行列 A が存在する。これを f の (標準基底に関する) 表現行列とよぶのだった (定理 3.12 参照)。

いま, \mathbb{C}^n の基底 (定義 2.1) $\{p_1, \dots, p_n\}$ を一つとるとき, この線形写像 f の基底 $\{p_j\}$ に関する表現行列は

$$(12.1) \quad P^{-1}AP \quad (P = [p_1, \dots, p_n])$$

と表される (問題 3-8 参照)。このことから,

正方行列 A が正則行列 $P = [p_1, \dots, p_n]$ によって対角化される, とは, 線形変換 $f: x \mapsto Ax$ の基底 $\{p_1, \dots, p_n\}$ に関する表現行列が対角行列となることである。

このとき, $P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ とおくと, $f(x_1p_1 + \dots + x_np_n) = \lambda_1x_1p_1 + \dots + \lambda_nx_np_n$ が成り立つ。すなわち, x の基底 $\{p_j\}$ に関する第 j 成分は f によって λ_j 倍される。

2 次形式の表現行列 \mathbb{R}^n 上の 2 次形式 q と対応する双線形形式を考え, その表現行列を A (A は実対称行列) とする (式 11.3, 11.5 参照)。

いま \mathbb{R}^n の基底 $\{p_1, \dots, p_n\}$ に対して $b_{ij} := q(p_i, p_j) = {}^t p_i A p_j$ ($i, j = 1, \dots, n$) とおくと, $B = [b_{ij}]$ はまた実対称行列である。この B を q の基底 $\{p_j\}$ に関する表現行列という。このとき

$$(12.2) \quad B = {}^t P A P \quad (P = [p_1, \dots, p_n])$$

が成り立つ。この変換公式は, 線形変換の表現行列の変換公式 (12.1) とは異なることに注意せよ。

表現行列の意味は以下の通り: いま $x \in \mathbb{R}^n$ を $x = x_1p_1 + \dots + x_np_n$ と基底 $\{p_j\}$ を用いて表すと,

$$(12.3) \quad q(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_i x_j$$

となる。とくに基底 $\{p_j\}$ が正規直交基底 (定義 6.2 参照) ならば, 式 (12.2) の P は直交行列 (定義 7.3) なので ${}^t P = P^{-1}$ である。まとめると

実対称行列 A が直交行列 $P = [p_1, \dots, p_n]$ によって対角化される, とは, 2 次形式 $q(x) = {}^t x A x$ の基底 $\{p_1, \dots, p_n\}$ に関する表現行列が対角行列となることである。このとき, $P^{-1}AP = {}^t P A P = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ とおくと, $q(x) = \lambda_1(x_1)^2 + \dots + \lambda_n(x_n)^2$ が成り立つ。

応用: 行列の指数関数 複素数を成分とする n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して

$$(12.4) \quad \|A\| := \sqrt{\text{tr } A^* A} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

と定める。特に, 各 i, j に対して

$$(12.5) \quad |a_{ij}| \leq \|A\| \quad (A = [a_{ij}])$$

が成り立つ。

補題 12.1. 正方行列 A, B に対して $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ が成り立つ。

証明: $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ とすると, Schwarz の不等式から

$$\text{左辺} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{l=1}^n |b_{lj}|^2 \right)} = \sqrt{\left(\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{l,j=1}^n |b_{lj}|^2 \right)} = \text{右辺}$$

となる

次は, (12.5) と 補題 12.1 からすぐにわかる:

補題 12.2. 正方行列 $A = [a_{ij}]$ と負でない整数 m に対して, 行列 $B^{(m)} = [b_{ij}^{(m)}]$ を

$$B^{(0)} = I, \quad B^{(m)} := \frac{1}{m!} A^m$$

で定めると, $|b_{ij}^{(m)}| \leq \frac{1}{m!} \|A\|^m$ が成り立つ。

これを用いると,

定理 12.3. 正方行列 A が与えられたとき, 各番号 m に対して

$$C^{(m)} := I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \cdots + \frac{1}{m!} A^m$$

とおくと $C^{(m)}$ の各成分 $c_{ij}^{(m)}$ は $m \rightarrow \infty$ としたときに収束する。

証明: 補題 12.2 の記号を用いれば

$$c_{ij}^{(m)} = 1 + b_{ij}^{(1)} + \cdots + b_{ij}^{(m)} = \sum_{l=1}^m b_{ij}^{(l)}$$

となる。ここで, 右辺の各項の絶対値をとった級数は, 補題 12.2 から

$$1 + |b_{ij}^{(1)}| + \cdots + |b_{ij}^{(m)}| \leq 1 + \|A\| + \frac{1}{2} \|A\|^2 + \cdots + \frac{1}{m!} \|A\|^m \leq e^{\|A\|}$$

を満たすので, 無限級数 $\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ij}^{(l)}|$ は収束する。したがって, 無限級数 $\sum_{i=1}^{\infty} b_{ij}^{(l)}$ は絶対収束する^{*17}。

定義 12.4. 正方行列 A に対して

$$e^A := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m = I + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \cdots$$

と定める。これをまた $\exp A$ と書くこともある。

例 12.5. 対角行列 $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ に対して $\Lambda^m = \text{diag}[(\lambda_1)^m, \dots, (\lambda_n)^m]$ なので

$$e^\Lambda = \text{diag}[e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}]$$

である。

また, 上三角行列 T の対角成分が $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ であるとき, T^m も上三角行列で, その対角成分は $(\lambda^1)^m, \dots, (\lambda^n)^m$ なので, e^T の対角成分は $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ である。

^{*17} ここでは数の範囲を複素数としているが, 微積分学で学んだ級数の絶対収束の性質は同じように成り立つ。

例 12.6. 正方行列 A と正則行列 P に対して

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P$$

が成り立つ. このことは $(P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^mP$ であることからすぐにわかる.

命題 12.7. 任意の正方行列 A に対して e^A は正則である.

証明: 定理 9.2 より A はユニタリ行列 U によって上三角行列にすることができる: $T = U^{-1}AU$ は上三角行列. T の対角成分を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とすると, e^T の対角成分は $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ だから $\det e^T = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \neq 0$. したがって $\det e^A = \det(Ue^T U^{-1}) \neq 0$.

例 12.8. 行列 A が正則行列 P によって対角化されているとき, $\Lambda := P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ とおくと

$$e^A = P^{-1}e^\Lambda P = P^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P$$

となる.

2次曲線 座標平面 \mathbb{R}^2 の, 2次式で表される図形

$$(12.6) \quad C := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2px + 2qy + r = 0 \right\}$$

を考える. ただし a, b, c, p, q, r は実数である.

例 12.9. 式 (12.6) で $a = c = 1, b = 2$ の場合を考える. このとき, C の定義式の 2 次の項たちは

$${}^t x A x \quad \left(A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

という形に書ける. 対称行列 A は

$${}^t P A P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

と直交行列 P によって対角化できるから,

$$X = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = P^{-1}x, \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y)$$

とおくと, C の定義式は

$$-X^2 + 3Y^2 + \sqrt{2}(p - q)X + \sqrt{2}(p + q)Y + r = 0$$

となる. これは双曲線を与えているが, $X = P^{-1}x$ は平面の回転なので, もとの図形 C も双曲線である.

問題

12-1 式 (12.2), (12.3) を確かめなさい.

12-2 次の行列 A_j に対して e^{A_j} を求めなさい :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

12-3 \mathbb{R}^n に値をとる t の関数 $x(t)$ が

$$(*) \quad \frac{d}{dt}x = Ax, \quad x(0) = a$$

を満たしているとする . ただし A は n 次の正方行列である . $x(t) := \exp(tA)a$ とおけば , これは (*) を満たしていることを確かめなさい . (実は , これは (*) の唯一の解である) .

12-4 関数 $y = y(t)$ に関する微分方程式 $\ddot{y} = -y$ ($\dot{\ } = d/dt$), $y(0) = a$, $\dot{y}(0) = b$ を

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \quad \left(x = \frac{dy}{dt} \right)$$

と書き換えることによって解きなさい .

12-5 式 (12.6) で与えられる \mathbb{R}^2 の部分集合は

楕円 ellipse / 双曲線 hyperbola / 放物線 parabola / 交わる 2 本の直線 / 平行な 2 本の直線 / 1 本の直線 / 1 点 / 空集合

のいずれかである . これらの各々の例となるような係数 a, b, c, p, q, r の例で $b \neq 0$ となるものをあげなさい .