

# Quatre applications du lemme de Zalcman à la dynamique complexe

Tomoki Kawahira \*  
Université de Nagoya

17 janvier 2014

## Résumé

Nous donnons quatre applications du lemme de Zalcman à la dynamique des fractions rationnelles sur la sphère de Riemann : un analogue paramétrique de la démonstration de la densité des cycles répulsifs ; la ressemblance de l'ensemble de Mandelbrot avec les ensembles de Julia ; une construction de la lamination de Lyubich-Minsky et d'une variante ; et une caractérisation unifiée des points coniques de Lyubich-Minsky et ceux de Martin-Mayer.

## Abstract

We give four applications of Zalcman's lemma to the dynamics of rational maps on the Riemann sphere : a parameter analogue of a proof of the density of repelling cycles in the Julia sets ; similarity between the Mandelbrot set and the Julia sets ; a construction of the Lyubich-Minsky lamination and its variant ; and a unified characterization of conical points by Lyubich-Minsky and those by Martin-Mayer.

## 0 Lemme de Zalcman

Soient  $D$  un domaine dans  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{F}$  une famille d'applications holomorphes de  $D$  dans  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Le lemme de Zalcman est une caractérisation de la (non) normalité :

**Lemme 0.1 (Lemme de Zalcman [Za], [Za2])** *La famille  $\mathcal{F}$  n'est pas normale au voisinage de  $z_0 \in D$  si et seulement s'il existe des suites  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ ,  $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^*$  avec  $\rho_k \rightarrow 0$ , et  $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset D$  avec  $z_k \rightarrow z_0$  telles que la suite  $\psi_k(w) = F_k(z_k + \rho_k w)$  converge vers une fonction méromorphe non constante  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$ .*

---

\*financé en partie par la Fondation Sumitomo, la Fondation Chubei Itoh, et la JSPS

On peut prendre la suite  $\rho_k$  réelle positive, mais on utilise cette version complexe dans cet article. De plus, notons qu'on peut remplacer la suite  $\psi_k$  par  $\tilde{\psi}_k(w) = F_k(z_k + \rho_k w + e_k(w))$  où  $e_k(w) = o(\rho_k)$  sur tout compact de  $\mathbb{C}$ , sans changer sa limite.

**Applications du lemme à la dynamique complexe.** On prend une fraction rationnelle  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  et on applique le lemme à la dynamique complexe engendrée par la famille des itérées  $\mathcal{F} = \{f^n\}_{n \geq 0}$  (voir la Figure 1). Alors le point  $z_0$  dans le lemme est un point dans l'ensemble de Julia  $J = J(f)$  de  $f$ . (Dans ce cas on prend la fonction  $F_k$  de la forme  $F_k = f^{n_k}$  avec  $n_k \rightarrow \infty$ .)

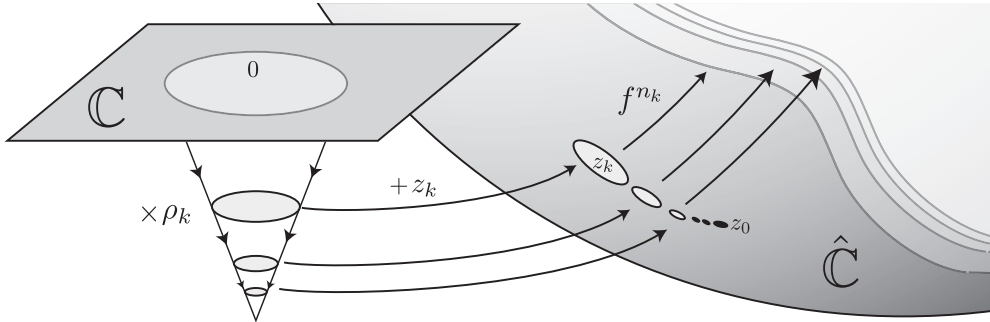


FIG. 1 – Le lemme de Zalcman pour la famille  $\mathcal{F} = \{f^n\}$  des itérées d'une application rationnelle  $f$ .

Le lemme de Zalcman semble parfait pour la théorie de la dynamique complexe, mais il y a peu de résultat obtenu en utilisant ce lemme : la première application est sans doute une démonstration simple de la densité des cycles répulsifs dans l'ensemble de Julia par Schwick [Sch]. (Elle a été améliorée par Bargmann [Ba] et Berteloot-Duval [BD]. Voir aussi [Za2] et [Sta].) Steinmetz [Ste] a étudié des propriétés des fonctions méromorphes engendrées par le lemme, en utilisant la théorie de la distribution des valeurs. Haïssinsky [Ha] et Martin-Mayer [MM] ont trouvé des applications aux phénomènes de rigidité. (Le lemme est aussi utilisé implicitement dans [Mc1]. Le principe du lemme est souvent utilisé dans [BM].)

Dans cet article on donnera quatre nouvelles applications du lemme de Zalcman :

1. un analogue paramétrique de la démonstration de la densité des cycles répulsifs par Schwick ;
2. une preuve alternative et simplifiée des théorèmes de Tan Lei [TL] et de Rivera-Letelier [RL], sur la ressemblance entre l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia aux paramètres semi-hyperboliques ;
3. une construction alternative de la lamination de Lyubich-Minsky des fractions rationnelles au moyen de fonctions générées par le lemme de Zalcman ; et
4. une caractérisation unifiée des notions de points coniques de Lyubich-Minsky et de Martin-Mayer.

**Notations.** Dans toute la suite,  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers positifs ou nul, *i.e.*  $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ . Pour  $x \in \mathbb{C}$  et  $r > 0$ , on note  $\mathbb{D}(x, r)$  le disque de centre  $x$  et de rayon  $r$ . En particulier,  $\mathbb{D}(0, r)$  et  $\mathbb{D}(0, 1)$  sont respectivement notés  $\mathbb{D}(r)$  et  $\mathbb{D}$ .

Pour deux variables complexes  $a$  et  $b$ , on écrit  $a \asymp b$  s'il existe une constante  $C > 1$  telle que  $|a|/C \leq |b| \leq |a|C$ .

**Remerciements.** Je voudrais remercier Jean-Yves Briend, Carlos Cabrera, Peter Haïssinsky, et les rapporteurs dont les remarques ont permis d'améliorer cet article. Je voudrais aussi remercier le LATP pour son hospitalité, où j'ai préparé ce travail. Je voudrais adresser en particulier mes remerciements à Peter Haïssinsky.

Ce travail est partiellement financé par la Fondation Sumitomo, la Fondation Chubei Itoh, et la JSPS.

## 1 Un analogue paramétrique de la méthode de Schwick

On commence par un échauffement pour s'habituer au lemme de Zalcman. On montre ici qu'on peut imiter l'idée de Schwick [Sch] dans l'espace paramétrique, et comment on peut remplacer la méthode traditionnelle utilisant le théorème de Montel par des méthodes utilisant le lemme de Zalcman. (L'origine de la méthode traditionnelle dans l'espace paramétrique se trouve dans l'article [Le] de Levin.)

Remarquons qu'il y a une démonstration très simple du théorème de Montel en utilisant le lemme de Zalcman. Voir [Za2] ou [BM].

### 1.1 Lieu de bifurcation et paramètres de Misiurewicz

On considère une famille de fonctions rationnelles paramétrées par le disque unité  $\mathbb{D}$  du plan complexe comme McMullen [Mc2] : soit  $f : \mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  une application holomorphe de la forme  $f : (t, z) \mapsto f_t(z)$ , où  $f_t : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  est une fraction rationnelle de degré fixé  $d \geq 2$ .

**Lieux de bifurcation et d'activité.** Le *lieu de bifurcation*  $B(f)$  est l'ensemble des paramètres  $t_0 \in \mathbb{D}$  tels que  $t_0$  ne soit pas  $J$ -stable, *i.e.*, il n'y a pas de famille continue de conjugaisons  $\phi_t : J(f_t) \rightarrow J(f_{t_0})$  entre  $f_t|_{J(f_t)}$  et  $f_{t_0}|_{J(f_{t_0})}$  sur tout voisinage de  $t_0$ .

Supposons qu'il existe une application holomorphe  $c : \mathbb{D} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  telle que  $c_t := c(t)$  soit un point critique de  $f_t$  pour tout  $t \in \mathbb{D}$ , et considérons la paire  $(f, c)$ . Chaque point  $c_t$  est appelé le *point critique marqué* de  $f_t$ . On dit que  $c_t$  est *actif* en  $t = t_0$  si la famille  $\{t \mapsto f_t^n(c_t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas normale sur tout voisinage de  $t_0$ . Le *lieu d'activité*  $A(f, c) \subset \mathbb{D}$  de la paire  $(f, c)$  est l'ensemble des paramètres  $t_0 \in \mathbb{D}$  tels que  $c_{t_0}$  est actif. En fait,  $A(f, c) \subset B(f)$ . Voir [Mc1, §4.1].

**Exemple.** Un exemple typique est la famille des polynômes quadratiques  $f : (t, z) \mapsto f_t(z) = z^2 + 3t$  avec le point critique marqué  $c(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{D}$ . On a alors  $A(f, c) = B(f) = \{t \in \mathbb{D} : 3t \in \partial M\}$ , où  $M$  est l'ensemble de Mandelbrot (voir la section 2).

**Points critiques prépériodiques.** Pour une telle paire  $(f, c)$ , on note  $\text{Prep}(k, l)$  ( $k \geq 0, l \geq 1$ ) l'ensemble des paramètres  $t$  de  $\mathbb{D}$  tels que  $f_t^{k+l}(c_t) = f_t^k(c_t)$ , où  $k$  et  $l$  sont minimaux. L'entier  $k$  s'appelle le *temps d'arrivée* du point critique marqué  $c_t$ . Puisque  $\text{Prep}(k, l)$  est déterminé par une équation analytique, il est discret ou tout le disque  $\mathbb{D}$ . Si  $k = 0$  et  $t \in \text{Prep}(0, l)$ , le point critique marqué  $c_t$  est un point périodique superattractif. On a donc  $t \notin A(f, c)$  et on appelle  $t \in \text{Prep}(0, l)$  un paramètre *superattractif*.

Pour  $k \geq 1$  et  $l \geq 1$ , on dit que  $t \in \text{Prep}(k, l)$  est un paramètre de *Misiurewicz* de la paire  $(f, c)$  si  $f_t^k(c_t)$  est un point périodique répulsif. On note  $\text{Mi}(k, l)$  l'ensemble des paramètres de Misiurewicz dans  $\text{Prep}(k, l)$ . Il est facile de montrer que  $\text{Mi}(k, l)$  est un sous-ensemble dense de  $A(f, c)$ , par une méthode simple et traditionnelle. (Voir par exemple [Le, Thm. 2] ou [Mc2, Prop 2.1].)

**La méthode de Schwick dans l'espace paramétrique.** On donne un peu plus d'informations sur la distribution de  $\text{Mi}(k, l)$  et  $\text{Prep}(k, l)$  lorsque  $k \geq 0$  ou  $l \geq 1$  est fixé, en utilisant la méthode de Schwick [Sch] :

**Théorème 1.1 (Distribution de  $\text{Prep}(k, l)$ )** *Supposons que  $A(f, c)$  ne soit pas vide, et  $t_0 \in \mathbb{D}$  soit un élément de  $A(f, c)$ . Alors on a les propriétés suivantes :*

- (1) *Si  $f_{t_0}$  a un cycle répulsif de période  $l \geq 3$ , alors il existe une suite  $t_j \in \text{Mi}(k_j, l)$  telle que  $t_j \rightarrow t_0$  et  $k_j \rightarrow \infty$  quand  $j \rightarrow \infty$ .*
- (2) *S'il existe un entier  $k \geq 1$  avec  $\deg(f_{t_0}, f_{t_0}^{k-1}(c_{t_0})) < \deg f_{t_0}$ , alors il existe une suite  $t_j \in \text{Prep}(k, l_j)$  telle que  $t_j \rightarrow t_0$  et  $l_j \rightarrow \infty$  quand  $j \rightarrow \infty$ .*
- (3) *Pour tout  $t_0 \in A(f, c)$  il existe une suite  $t_j \in \text{Prep}(0, l_j)$  de paramètres superattractifs telle que  $t_j \rightarrow t_0$  et  $l_j \rightarrow \infty$  quand  $j \rightarrow \infty$ .*

Dans (2) on note  $\deg(f_{t_0}, a)$  le degré local de  $f_{t_0}$  en un point  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ .

Remarquons que (1) est une propriété locale de  $t_0 \in A(f, c)$ . Mais il garantit la densité des paramètres de Misiurewicz dans tout  $A(f, c)$ .

**Corollaire 1.2** *Supposons que le lieu de bifurcation  $B(f)$  ne soit pas vide. Alors l'ensemble des paramètres  $t$  tels que  $f_t$  ait un point critique pré-répulsif est dense dans  $B(f)$ . De plus,  $B(f)$  est contenu dans l'adhérence de l'ensemble des paramètres  $t$  ayant un point critique périodique.*

**Démonstration.** Supposons que  $t_0 \in B(f)$ . Alors  $f_{t_0}$  a au moins un point critique actif (voir [Mc1, Thm.4.2]) et donc on peut appliquer le Théorème 1.1, mais il peut y avoir des points critiques multiples. Dans ce cas, on utilise des séries de Puiseux (voir [Mc2, Prop.2.4] et [Fo, §8.13]).

Les points critiques de  $\{f_t\}$  forment une variété analytique dans  $\mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}}$ . En prenant une carte locale  $t \mapsto s$  de la forme  $t = t_0 + \eta s^p$  pour un  $|\eta| \ll 1$ , la famille holomorphe  $\{f_t : t = t_0 + \eta s^p, s \in \mathbb{D}\}$  représente une perturbation locale de  $f_{t_0}$  telle que tout point critique soit paramétré holomorphiquement. Ainsi on peut trouver un point critique marqué qui est actif en  $t = t_0$ , et appliquer le Théorème 1.1. ■

## 1.2 Démonstration du Théorème 1.1

**Démonstration de (1).** D'abord nous montrons (1) pour comparer une démonstration traditionnelle utilisant le théorème de Montel avec une autre démonstration utilisant l'idée de Schwick.

Les deux démonstrations suivantes reposent sur la dépendance holomorphe des points périodiques répulsifs : comme par hypothèse il y a un cycle répulsif contenant au moins trois points, on peut trouver des applications holomorphes  $t \mapsto \{\alpha_t, \beta_t, \gamma_t\}$  dans un petit voisinage de  $t = t_0$  paramétrant trois points périodiques répulsifs de  $f_t$ .

**Démonstration traditionnelle.** Comme la famille  $\{F_n : t \mapsto f_t^n(c_t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas normale sur tout voisinage de  $t = t_0$ , en vertu du théorème de Montel, il existe des suites  $t_j \rightarrow t_0$  et  $n_j \rightarrow \infty$  telles que  $f_{t_j}^{n_j}(c_{t_j}) \in \{\alpha_{t_j}, \beta_{t_j}, \gamma_{t_j}\}$ . On a donc  $t_j \in \text{Mi}(k_j, l)$  pour un  $k_j \geq 1$ .

Montrons que le temps d'arrivée  $k_j$  n'est pas borné. Si c'était le cas, il y aurait un  $k \geq 1$  avec  $f_t^{k+l}(c_t) = f_t^k(c_t)$  pour une suite  $t = t_j \rightarrow t_0$ , alors  $\{F_n : t \mapsto f_t^n(c_t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  serait normale au voisinage de  $t = t_0$ . Mais c'est contradictoire avec l'activité. ■

**Démonstration utilisant le lemme de Zalcman.** Comme  $\{F_n : t \mapsto f_t^n(c_t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas normale en  $t = t_0$ , par le lemme de Zalcman (Lemme 0.1), il existe des suites  $n_j \rightarrow \infty$ ,  $u_j \rightarrow t_0$ ,  $\rho_j \rightarrow 0$  ( $j \rightarrow \infty$ ) telles que  $\psi_j(w) := F_{n_j}(u_j + \rho_j w) = f_{u_j + \rho_j w}^{n_j}(c_{u_j + \rho_j w})$  converge vers une fonction méromorphe non constante  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$ .

Par le théorème de Picard, il existe un  $w_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $\psi(w_0)$  est un des points répulsifs  $\{\alpha_{t_0}, \beta_{t_0}, \gamma_{t_0}\}$ . Supposons que  $\psi(w_0) = \alpha_{t_0}$  par exemple. La fonction  $w \mapsto f_{u_j + \rho_j w}^{n_j}(c_{u_j + \rho_j w}) - \alpha_{u_j + \rho_j w}$  converge vers  $w \mapsto \psi(w) - \alpha_{t_0}$  uniformément sur un disque contenant  $w = w_0$ , et donc le théorème de Hurwicz affirme qu'il existe une suite  $w_j \rightarrow w_0$  tel que  $f_{u_j + \rho_j w_j}^{n_j}(c_{u_j + \rho_j w_j}) = \alpha_{u_j + \rho_j w_j}$ . Posons  $t_j := u_j + \rho_j w_j$ . On a alors  $t_j \rightarrow t_0$  ( $j \rightarrow \infty$ ), et comme  $\alpha_{u_j + \rho_j w_j}$  est un point périodique répulsif,  $t_j \in \text{Mi}(k_j, l)$  pour un  $k_j \geq 1$ . On peut montrer  $k_j \rightarrow \infty$  comme ci-dessus. ■

**Démonstrations de (3).** Ensuite nous montrons (3) et comparons les deux méthodes encore une fois.

**Esquisse de démonstration traditionnelle.** Si  $c_{t_0}$  est un point exceptionnel (*i.e.*, l'ensemble  $\bigcup_{n \geq 0} f_{t_0}^{-n}(c_{t_0})$  est au plus deux points : voir [Mi, Lem. 4.9]), alors ce point est périodique et superattractif, donc il n'est pas actif.

À l'aide d'une série de Puiseux, on peut trouver une autre coordonnée au voisinage de  $t_0$  et des fonctions holomorphes  $t \mapsto \{a_t, b_t, c_t\}$  telles que les graphes de ces fonctions soient disjoints et satisfont  $f_t^m(a_t) = f_t^n(b_t) = c_t$  pour deux entiers  $n, m \geq 1$ .

Maintenant on peut appliquer le même argument que celui de (1). ■

**Démonstration utilisant le lemme de Zalcman.** On applique le lemme à la famille  $\{F_n : t \mapsto f_t^n(c_t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Supposons que  $t_0 \in A(f, c)$ . Alors on peut trouver des

suites  $n_j, \rho_j$  et  $u_j \rightarrow t_0$  ( $j \rightarrow \infty$ ) telles que  $\psi_j(w) := F_{n_j}(u_j + \rho_j w)$  converge vers une fonction méromorphe non constante  $\psi(w)$  de  $\mathbb{C}$  uniformément sur tout compact.

Comme  $c_{t_0}$  n'est pas un point exceptionnel, on peut trouver un entier  $m \geq 1$  tel qu'il existe au moins trois solutions  $\{z_0, z_1, z_2\}$  de l'équation  $f_{t_0}^m(z) = c_{t_0}$ . Supposons que  $z_0$  n'est pas une valeur exceptionnelle au sens de Picard pour une telle  $\psi$ . Il existe donc un point  $w_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $\psi(w_0) = z_0$  et donc  $f_{t_0}^m \circ \psi(w_0) = c_{t_0}$ .

Comme  $\psi_j \rightarrow \psi$  ( $j \rightarrow \infty$ ) et  $\psi_j(w) = f_{u_j + \rho_j w}^{n_j}(c_{u_j + \rho_j w})$ , l'équation

$$f_{u_j + \rho_j w}^m \circ f_{u_j + \rho_j w}^{n_j}(c_{u_j + \rho_j w}) = c_{u_j + \rho_j w}$$

a une solution  $w_j$  tendant vers  $w_0$ . Soit  $t_j := u_j + \rho_j w_j$ , alors  $t_j \rightarrow t_0$  ( $j \rightarrow \infty$ ) et  $c_{t_j}$  est périodique de période  $l_j := n_j + m$ . (La période de  $c_{t_j}$  est non bornée, sinon la famille  $\{c_t : t \in \mathbb{D}\}$  serait normale.) ■

**Démonstration de (2).** Il y a une preuve utilisant une idée de Douady-Hubbard [DH, Chapter V.2] (voir aussi [Mc2, Thm. 3.1]), mais on doit contrôler les points de Misiurewicz délicatement, et la preuve n'est pas très simple. Nous donnons ici une autre preuve utilisant le lemme de Zalcman.

Fixons le temps d'arrivée  $k \geq 1$ . Par hypothèses, il existe un point  $a_0 \in f_{t_0}^{-1}(f_{t_0}^k(c_{t_0}))$  tel que  $a_0 \neq f_{t_0}^{k-1}(c_{t_0})$ . Il y a donc un entier  $m \geq 1$  tel qu'il existe au moins trois solutions différentes  $\{z_0, z_1, z_2\}$  de l'équation  $f_{t_0}^m(z) = a_0$ . Prenons des suite  $n_j \rightarrow \infty$ ,  $\rho_j \rightarrow 0$ , et  $u_j \rightarrow t_0$  ( $j \rightarrow \infty$ ) telles que  $f_{u_j + \rho_j w}^{n_j}(u_j + \rho_j w) \rightarrow \psi(w)$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Alors on peut trouver un  $w_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $f_{t_0}^m \circ \psi(w_0) = a_0$  et  $w_0$  est donc une solution de l'équation  $f_{t_0}(f_{t_0}^m \circ \psi(w)) = f_{t_0}^k(c_{t_0})$ . Pour  $j \gg 0$ , il y a aussi une solution  $w_j$  de l'équation

$$f_{u_j + \rho_j w}(f_{u_j + \rho_j w}^m \circ f_{u_j + \rho_j w}^{n_j}(c_{u_j + \rho_j w})) = f_{u_j + \rho_j w}^k(c_{u_j + \rho_j w})$$

telle que  $w_j \rightarrow w_0$ . Soit  $t_j := u_j + \rho_j w_j$ . Comme  $t_j \rightarrow t_0$  et  $f_{t_j}^m \circ f_{t_j}^{n_j}(c_{t_j}) \rightarrow a_0$ , on a  $f_{t_j}^{m+n_j}(c_{t_j}) \neq f_{t_j}^{k-1}(c_{t_j})$  et le paramètre  $t_j$  est un élément de  $\text{Prep}(k, m + n_j + 1 - k)$ . Posons  $l_j := m + n_j + 1 - k$ . ■

**Remarque.** Schwick a aussi montré la densité des cycles répulsifs dans l'ensemble de Julia pour les fonctions entières non polynomiales [Sch], et la même méthode marche pour les familles de fonctions méromorphes. Remarquons que l'analogie paramétrique marche aussi.

## 2 Ressemblance entre $M$ et $J$

Dans cette section, nous donnons une application du lemme de Zalcman à la dynamique des polynômes quadratiques. Dans [TL], Tan Lei a montré qu'au voisinage de tout paramètre de Misiurewicz, l'ensemble de Mandelbrot ressemble à l'ensemble de Julia de ce paramètre. Ce résultat est amélioré par Rivera-Letelier [RL] pour les paramètres semi-hyperboliques, mais sa méthode est différente de celle de Tan Lei.

On donne ici une démonstration unifiée et simplifiée de ces résultats, en utilisant le lemme du Zalcman. Plus précisément, nous n'utilisons pas le lemme directement, mais nous utilisons son principe et l'idée de Schwick. De plus, on montre que l'ensemble de Julia du paramètre faiblement hyperbolique est auto-similaire au voisinage de sa valeur critique (c'est-à-dire de ce paramètre).

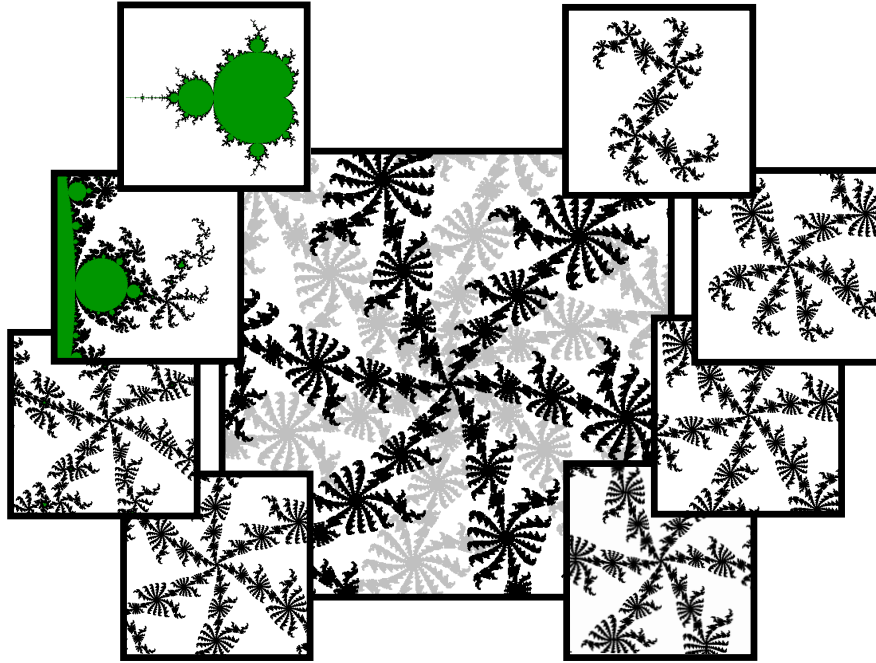


FIG. 2 – Le tableau central représente des petites pièces de  $M$  (en gris) et de  $J(f_{c_0})$  (en noir) centrées en un paramètre de Misiurewicz  $c_0$  dans la même coordonnée. En zoomant en arrière, on voit qu'en fait ils sont globalement différents.

## 2.1 La ressemblance

**L'ensemble de Mandelbrot.** Considérons la famille quadratique

$$\{f_c(z) = z^2 + c : c \in \mathbb{C}\}$$

comme [TL]. Soit  $M$  l'ensemble de Mandelbrot, *i.e.*,

$$M := \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(c)| \leq 2 \ (\forall n \in \mathbb{N})\}.$$

D'après la section 1, la frontière  $\partial M$  est caractérisée comme le lieu d'activité/bifurcation du point critique  $z = 0$ . Lorsqu'on a  $c \in M$ , on définit *l'ensemble de Julia rempli* de  $f_c$  par

$$K(f_c) := \{z \in \mathbb{C} : |f_c^n(z)| \leq 2 \ (\forall n \in \mathbb{N})\}.$$

En fait, on a toujours  $J(f_c) = \partial K(f_c)$ .

**Paramètres semi-hyperboliques.** Un paramètre  $c_0 \in \partial M$  est appelé *semi-hyperbolique* si l'adhérence de l'orbite de  $c_0$  ne contient pas  $c_0$  lui-même. Par exemple, si  $c_0 \in \partial M$  est Misiurewicz, *i.e.*,  $c_0$  est strictement prépériodique, alors  $c_0$  est semi-hyperbolique.

Si  $c_0 \in \partial M$  est semi-hyperbolique, alors tous les cycles périodiques dans  $\mathbb{C}$  sont répulsifs, et on a donc  $J(f_{c_0}) = K(f_{c_0})$ . La propriété la plus importante pour nous est le suivant :

**Lemme 2.1** *Soit  $c_0 \in \partial M$  un paramètre semi-hyperbolique. Alors :*

- (1) *il existe des suites  $n_k \in \mathbb{N}$  avec  $n_k \rightarrow \infty$  et  $\rho_k \in \mathbb{C}^*$  avec  $\rho_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) telles que la suite des fonctions*

$$\phi_k(w) = f_{c_0}^{n_k}(c_0 + \rho_k w)$$

*converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$  vers une fonction  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  non constante ; de plus,*

- (2) *il existe une constante  $Q \neq 0$  telle que la suite*

$$\Phi_k(w) := f_{c_0 + Q\rho_k w}^{n_k}(c_0 + Q\rho_k w)$$

*converge vers la même fonction  $\phi(w)$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$ .*

La démonstration du lemme sera donnée dans la sous-section suivante. Remarquons que la fonction  $\phi(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{c_0}^{n_k}(c_0 + \rho_k w)$  a la même forme que la fonction du lemme de Zalcman.

**Exemple (La fonction de Poincaré).** Dans le cas de Misiurewicz, il existe deux entiers  $l, p \geq 1$  tels que  $f_{c_0}^l(c_0) = f_{c_0}^{l+p}(c_0)$ , et  $a_0 := f_{c_0}^l(c_0)$  est un point périodique répulsif de période  $p$ . On pose  $A_0 := (f_{c_0}^l)'(c_0)$  et  $\lambda_0 := (f_{c_0}^p)'(a_0)$ . (On a  $A_0 \neq 0$  parce que  $c_0$  n'est pas un point périodique superattractif.) Par un théorème de Kœnigs (voir [Mi, Thm.8.2, Cor.8.12]), la fonction  $f_{c_0}^{kp}(a_0 + w/\lambda_0^k)$  converge vers une fonction entière  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  avec  $\phi(\lambda_0 w) = f_{c_0}^p \circ \phi(w)$  quand  $k \rightarrow \infty$ . La fonction  $\phi$  s'appelle *la fonction de Poincaré*. Comme on a  $f_{c_0}^l(c_0 + \Delta z) = a_0 + A_0 \Delta z + o(\Delta z)$  pour tout  $\Delta z \approx 0$ ,

$$\phi(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{c_0}^{kp} \left( a_0 + \frac{w}{\lambda_0^k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{c_0}^{l+kp} \left( c_0 + \frac{w}{A_0 \lambda_0^k} + o(\lambda_0^{-k}) \right)$$

sur tout compact de  $\mathbb{C}$ . On obtient donc  $\phi(w) = \lim_k f_{c_0}^{l+kp}(c_0 + w/(A_0 \lambda_0^k))$ , et alors on peut prendre  $n_k = l + kp$  et  $\rho_k = 1/(A_0 \lambda_0^k)$  dans le Lemme 2.1.

**Topologie de Hausdorff.** On rappelle la *topologie de Hausdorff* dans l'espace  $\text{Comp}^*(\mathbb{C})$  des sous-ensembles compacts (non vides) de  $\mathbb{C}$ .

Pour une suite  $\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{Comp}^*(\mathbb{C})$ , on dit que  $K_k$  converge vers  $K \in \text{Comp}^*(\mathbb{C})$  quand  $k \rightarrow \infty$  si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $K \subset N_\epsilon(K_k)$  et  $K_k \subset N_\epsilon(K)$  pour tout  $k \geq k_0$ , où  $N_\epsilon(\cdot)$  est le  $\epsilon$ -voisinage ouvert dans  $\mathbb{C}$ .

Posons  $\mathbb{D}(r) := \{|z| < r\}$ . Pour  $K \subset \mathbb{C}$  fermé, notons  $[K]_r$  l'ensemble  $(K \cap \mathbb{D}(r)) \cup \partial \mathbb{D}(r) \in \text{Comp}^*(\mathbb{C})$ . Pour des constantes  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $b \in \mathbb{C}$ , notons  $a(K - b)$  l'ensemble  $\{a(z - b) : z \in K\}$ .



**Ressemblance.** Soit  $c_0$  un paramètre semi-hyperbolique. Par le Lemme 2.1, on peut trouver des suites  $n_k \rightarrow \infty$  et  $\rho_k \rightarrow 0$  telles que  $\phi_k(w) = f_{c_0}^{n_k}(c_0 + \rho_k w)$  converge vers une fonction entière non constante,  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . (Remarquons que  $\phi$  n'a pas de pôles, comme  $\phi_k$  est un polynôme.) On a aussi une constante  $Q \neq 0$  telle que  $\Phi_k(w) = f_{c_0+Q\rho_k w}^{n_k}(c_0 + Q\rho_k w)$  converge vers la même fonction  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Le résultat principal de cette section est la modification suivante de [TL, RL] :

**Théorème 2.2 (Ressemblance entre  $M$  et  $J$ )** Soient  $c_0 \in \partial M$  semi-hyperbolique et  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction limite de  $\phi_k(w) = f_{c_0}^{n_k}(c_0 + \rho_k w)$  et de  $\Phi_k(w) = f_{c_0+Q\rho_k w}^{n_k}(c_0 + Q\rho_k w)$  ci-dessus. Posons  $\mathcal{J} := \phi^{-1}(J) \subset \mathbb{C}$ , où  $J = J(f_{c_0})$  est l'ensemble de Julia de  $f_{c_0}$ . Alors pour tout  $r > 0$ ,

- (a)  $[\rho_k^{-1}(J - c_0)]_r \rightarrow [\mathcal{J}]_r \quad (k \rightarrow \infty)$
- (b)  $[Q^{-1}\rho_k^{-1}(M - c_0)]_r \rightarrow [\mathcal{J}]_r \quad (k \rightarrow \infty)$

dans la topologie de Hausdorff.

**Remarque.** Rivera-Letelier a montré que la distance de Hausdorff entre  $[\lambda(J - c_0)]_R$  et  $[M - c_0]_R$  est  $O(R^{3/2})$  quand  $R \rightarrow 0$ , où  $\lambda = \sum_{n \geq 0} 1/(f_{c_0}^n)'(c_0)$ . Voir le premier corollaire de [RL, p.290, Thm. B]. (Dans l'inégalité du corollaire  $Cr^{1/d}$  est en fait  $Cr^{1+1/d}$ .) Donc on a  $Q = \lambda$  et la distance de Hausdorff entre  $[\rho_k^{-1}(J - c_0)]_r$  et  $[Q^{-1}\rho_k^{-1}(M - c_0)]_r$  est  $O(r^{3/2}\sqrt{\rho_k})$  pour tout  $r$  fixé.

**Démonstration de (a).** Comme  $f_{c_0}^n(J) = J$ , on a  $[\rho_k^{-1}(J - c_0)]_r = [\phi_k^{-1}(J)]_r$ . Par définition de  $\mathcal{J}$ , on a  $[\mathcal{J}]_r = [\phi^{-1}(J)]_r$ . Puisque  $\phi_k$  converge vers  $\phi$  uniformément dans  $\overline{\mathbb{D}(r)}$ , on obtient (a).

**Démonstration de (b).** Posons  $\mathcal{M}_k := Q^{-1}\rho_k^{-1}(M - c_0)$ . Nous montrons que pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$[\mathcal{M}_k]_r \subset N_\epsilon([\mathcal{J}]_r) \quad \text{et} \quad [\mathcal{J}]_r \subset N_\epsilon([\mathcal{M}_k]_r)$$

quand  $k$  est assez grand.

D'abord, l'ensemble  $\overline{\mathbb{D}(r)} - N_\epsilon(\mathcal{J})$  est compact, donc il existe un entier  $N = N(\epsilon)$  tel que  $|f_{c_0}^N \circ \phi(w)| > 2$  pour tout  $w \in \overline{\mathbb{D}(r)} - N_\epsilon(\mathcal{J})$ . Comme  $\Phi_k(w)$  converge vers  $\phi(w)$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$  (Lemme 2.1), on a

$$\left| f_{c_0+Q\rho_k w}^{N+n_k}(c_0 + Q\rho_k w) \right| > 2$$

pour tout  $k \gg 0$ . Par conséquent, on a  $c_0 + Q\rho_k w \notin M$ , i.e.,  $w \notin \mathcal{M}_k$ . Du coup, l'inclusion  $[\mathcal{M}_k]_r \subset N_\epsilon([\mathcal{J}]_r)$  est vérifiée.

Pour l'autre inclusion, prenons un ensemble fini  $E \subset [\mathcal{J}]_r$  tel que le  $\epsilon/2$ -voisinage de  $E$  contienne  $[\mathcal{J}]_r$ . Il suffit de trouver une suite  $w_k \in [\mathcal{M}_k]_r$  pour chaque  $w_0 \in E$  telle que  $|w_0 - w_k| < \epsilon/2$  pour tout  $k \gg 0$ .

Posons  $\Delta := \mathbb{D}(w_0, \epsilon/2)$ . Dans le cas  $\Delta \cap \partial\mathbb{D}(r) \neq \emptyset$ , on prend la suite  $w_k$  dans  $\partial\mathbb{D}(r)$ .

Dans le cas  $\Delta \subset \mathbb{D}(r)$ , puisque  $\phi(w_0) \in J(f_{c_0})$  et les cycles répulsifs sont denses dans  $J(f_{c_0})$ , on peut trouver un  $w'_0$  tel que  $|w_0 - w'_0| < \epsilon/4$  et tel que  $\phi(w'_0)$  soit un point périodique répulsif de période  $m$ . Alors  $w = w'_0$  est un zéro de la fonction  $\chi : w \mapsto f_{c_0}^m(\phi(w)) - \phi(w)$ . Considérons la fonction  $\chi_k : w \mapsto f_{c_0 + Q\rho_k w}^m(\Phi_k(w)) - \Phi_k(w)$ . La fonction  $\Phi_k$  converge vers  $\phi$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$ , donc pour  $k \gg 0$  il existe un zéro  $w_k \in \Delta$  de  $\chi_k$  avec  $|w_k - w'_0| < \epsilon/4$ . En particulier,  $c_k := c_0 + Q\rho_k w_k$  satisfait  $f_{c_k}^{n_k+m}(c_k) = f_{c_k}^{n_k}(c_k)$ . On a donc  $c_k \in M$ . Par suite, on peut trouver une suite  $w_k \in \mathcal{M}_k$  avec  $|w_k - w_0| < \epsilon/2$ . ■

## 2.2 Démonstration du Lemme 2.1

**Ensemble hyperbolique.** Soit  $c_0 \in \partial M$  un paramètre semi-hyperbolique, et  $X_0$  l'ensemble des points d'adhérence de l'orbite de  $c_0$ . L'ensemble  $X_0$  est un *ensemble hyperbolique*, c'est-à-dire,  $X_0$  est compact,  $f_{c_0}(X_0) = X_0$ , et il existe des constantes  $\kappa, \eta > 0$  telles que  $|(f_{c_0}^n)'(x)| \geq \kappa(1 + \eta)^n$  pour tout  $x \in X_0$  et tout  $n \in \mathbb{N}$  (voir [CJY]).

Par exemple, si  $c_0 \in \partial M$  est Misiurewicz, alors l'orbite  $\{f_{c_0}^n(c_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  tombe en un temps fini sur un cycle répulsif. Dans ce cas,  $X_0$  est ce cycle répulsif. En fait, l'orbite de  $c_0$  toujours tombe sur  $X_0$  :

**Lemme 2.3** *Si  $c_0 \in \partial M$  est semi-hyperbolique, il existe un  $l \in \mathbb{N}$  tel que  $f_{c_0}^l(c_0) \in X_0$ .*

**Démonstration.** Par hyperbolicité de  $X_0$ , on peut prendre un  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $|(f_{c_0}^p)'(x)| \geq 3$  pour tout  $x \in X_0$ . Comme  $X_0$  est compact, il existe un  $\delta > 0$  tel que si  $z \in N_\delta(X_0) - X_0$  on a  $\text{dist}(f_{c_0}^p(z), X_0) \geq 2 \text{dist}(z, X_0)$ . Si  $f_{c_0}^n(c_0) \notin X_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il y a un autre point d'adhérence de l'orbite de  $c_0$  dans  $\widehat{\mathbb{C}} - N_\delta(X_0)$ , mais c'est contradictoire avec la définition de  $X_0$ . ■(Lemme 2.3)

Pour montrer le Lemme 2.1, on utilise une idée de [LM, Lemma 4.7] :

**Démonstration du Lemme 2.1, (1).** On fixe  $f := f_{c_0}$  avec  $c_0 \in \partial M$  semi-hyperbolique. Par le Lemme 2.3, il existe un  $l > 0$  tel que  $a_0 := f^l(c_0) \in X_0$ . Pour  $m \in \mathbb{N}$ , posons  $a_m := f^m(a_0) \in X_0$ ,  $\lambda_m := (f^m)'(a_0)$ , et  $T_m(w) := a_0 + w/\lambda_m$  ( $w \in \mathbb{C}$ ). Puisque  $|\lambda_m| \geq \kappa(1 + \eta)^m \rightarrow \infty$  ( $m \rightarrow \infty$ ), on peut trouver un  $p \in \mathbb{N}$  et un  $\mu_0 > 1$  tels que  $|(f^p)'(x)| \geq \mu_0$  pour tout  $x \in X_0$ . Comme  $X_0$  est l'ensemble  $\omega$ -limite de 0 et de  $a_0$ , il existe un  $x_0 \in X_0$  et une suite  $\{m(k)\}_{k \geq 0} \subset p\mathbb{N}$  tels que  $a_{m(k)} \rightarrow x_0$  quand  $k \rightarrow \infty$ . (Par exemple, si  $c_0$  est Misiurewicz et  $c_0$  tombe sur un point périodique répulsif  $a_0$  de période  $p \geq 1$ , alors on peut choisir  $x_0 = a_0$ ,  $\mu_0 = |(f^p)'(a_0)|$ , et  $m(k) = kp$ .) Soit  $\psi_k := f^{m(k)} \circ T_{m(k)} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Alors on a :

**Proposition 2.4** *La suite  $\{\psi_k\}_{k \geq 0}$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$  vers une application entière  $\psi$  telle que  $\psi'(0) = 1$  et  $\psi(0) = x_0$ .*

**Démonstration.** D'abord on montre qu'il existe un  $\delta > 0$  tel que  $\psi_k|_{\mathbb{D}(\delta)}$  est univalente pour tout  $k \in \mathbb{N}$  : comme  $|(f^p)'| \geq \mu_0 > 1$  sur  $X_0$ , il existe un  $\delta_0 > 0$  tel

que  $f^p|\mathbb{D}(x, \delta_0)$  soit univalente et  $\mathbb{D}(f^p(x), \delta_0) \subseteq f^p(\mathbb{D}(x, \delta_0))$  pour tout  $x \in X_0$ . Il existe donc une application inverse  $h_k : \mathbb{D}(a_{m(k)}, \delta_0) \rightarrow \mathbb{C}$  de  $\psi_k = f^{m(k)} \circ T_{m(k)}$  telle que  $h_k$  soit univalente et  $h_k(a_{m(k)}) = h'_k(a_{m(k)}) - 1 = 0$ . Par le théorème du quart de Koebe,  $\mathbb{D}(\delta_0/4) \subset h_k(\mathbb{D}(a_{m(k)}, \delta_0))$ . Soit  $\delta := \delta_0/4$ . Alors la famille  $\{\psi_k|\mathbb{D}(\delta)\}_{k \geq 0}$  est univalente, donc uniformément bornée sur tout l'ensemble compact par un théorème de Koebe (voir [Du, §2.3]). En particulier, la famille est équicontinue.

Ensuite on montre que la famille  $\{\psi_k\}_{k \geq 0}$  est normale sur  $\mathbb{C}$  : soit  $G_{N,j} := T_{m(N)}^{-1} \circ f^{m(N+j)-m(N)} \circ T_{m(N+j)}$  pour que  $\psi_{N+j} = \psi_N \circ G_{N,j}$ . En utilisant le théorème du quart de Koebe encore une fois, on voit que  $G_{N,j}$  est univalente sur  $\mathbb{D}(\delta|\lambda_{m(N)})$ . Posons

$$w_{N,j} := G_{N,j}(0) = h_N \circ \psi_{N+j}(0) = h_N(a_{m(N+j)}).$$

Comme  $h_N$  est univalente sur  $\mathbb{D}(a_{m(N)}, \delta_0)$  avec  $h'_N(a_{m(N)}) = 1$  pour tout  $N$ , et comme  $\{a_{m(k)}\}_{k \geq 0}$  est de Cauchy, on obtient  $w_{N,j} \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow \infty$ . Soit  $\tilde{G}_{N,j}(w) := G_{N,j}(w) - w_{N,j}$ . Alors  $\tilde{G}_{N,j}$  est univalente sur  $\mathbb{D}(\delta|\lambda_{m(N)})$ , et on a  $\tilde{G}_{N,j}(0) = \tilde{G}'_{N,j}(0) - 1 = 0$ .

On prend un  $r > 0$  arbitrairement grand. Par un théorème de Koebe (voir [Du, §2.3]), on a  $|\tilde{G}'_{N,j}(w) - 1| \leq C|w|/|\lambda_{m(N)}|$  sur  $\mathbb{D}(r)$ , où  $C = C(\delta, r)$  est une constante indépendante de  $N$  assez grand. Alors on a  $\tilde{G}_{N,j}(w) = w + O(r^2/|\lambda_{m(N)}|)$ , donc  $G_{N,j}(w) = w + O(r^2/|\lambda_{m(N)}|) + O(|a_{m(N+j)} - a_{m(N)}|)$ . En particulier, si  $N$  est assez grand, on a  $G_{N,j}(\mathbb{D}(r)) \subset \mathbb{D}(2r)$ . Soit  $R = R(r, N) = \max\{|\psi_N(w)| : |w| \leq 2r\}$ . Alors

$$\psi_{N+j}(\mathbb{D}(r)) = \psi_N(G_{N,j}(\mathbb{D}(r))) \subset \mathbb{D}(R)$$

pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . Puisque la famille  $\{\psi_k\}_{k \geq 0}$  est uniformément bornée sur tout compact de  $\mathbb{C}$ , la famille  $\{\psi_k\}_{k \geq 0}$  est normale sur  $\mathbb{C}$ .

Supposons que  $w \in \mathbb{D}(\delta)$ . Alors  $G_{N,j}(w) \rightarrow w$  uniformément sur  $\mathbb{D}(\delta)$  quand  $N \rightarrow \infty$ . Comme  $|\psi_{N,j}(w) - \psi_N(w)| = |\psi_N(G_{N,j}(w)) - \psi_N(w)| \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow \infty$  et comme  $\{\psi_N\}$  est équicontinue pour tout  $N$  sur  $\mathbb{D}(\delta)$ , la suite  $\{\psi_k|\mathbb{D}(\delta)\}_{k \geq 0}$  est de Cauchy. Ainsi la limite  $\psi = \lim \psi_k$  avec  $\psi'(0) = 1$  et  $\psi(0) = x_0$  existe, et elle est entière par normalité de  $\{\psi_k\}_{k \geq 0}$  sur  $\mathbb{C}$ . ■(Proposition 2.4)

Posons  $n_k := m(k) + l$ ,  $\rho_k := 1/(f^{n_k})'(c_0)$ .  $\phi_k(w) := f^{n_k}(c_0 + \rho_k w)$ , et  $A_0 := (f^l)'(c_0) \neq 0$ . On a alors  $A_0 \lambda_{m(k)} = 1/\rho_k$  et

$$f^l(z) = a_0 + A_0(z - c_0) + o(z - c_0),$$

donc

$$\phi_k(w) = f^{m(k)}(a_0 + A_0 \rho_k w + o(\rho_k)) \rightarrow \lim \psi_k(w) = \psi(w)$$

uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$ . Soit  $\phi := \psi$ . ■(Lemme 2.1,(1))

Pour montrer le Lemme 2.1(2), on utilise la stabilité dynamique de l'ensemble hyperbolique  $X_0$  (voir [Shi, §1]) :

**Proposition 2.5 (Mouvement holomorphe de  $X_0$ )** *Il existe un voisinage  $U$  de  $c_0$  dans  $\mathbb{C}$  tel qu'on ait un mouvement holomorphe dynamique  $\chi : X_0 \times U \rightarrow \mathbb{C}$  :*

- pour tout point  $x \in X_0$ ,  $\chi(x, c_0) = x$  ;
- pour tout point  $x \in X_0$  fixé, l'application  $\chi^x : c \mapsto \chi(x, c)$  est holomorphe ; et
- pour tout paramètre  $c \in U$  fixé, l'application  $\chi_c : x \mapsto \chi(x, c)$  est quasiconforme telle que  $f_c \circ \chi_c = \chi_c \circ f_{c_0}$  sur  $X_0$ .

Par exemple, si  $c_0 \in \partial M$  est Misiurewicz,  $\chi_c(X_0)$  est un cycle répulsif de  $f_c$ . Dans ce cas, la fonction de Poincaré de chaque point périodique dans  $\chi_c(X_0)$  dépend holomorphiquement de  $c$ . Plus généralement, si  $c_0 \in \partial M$  est semi-hyperbolique, on a :

**Lemme 2.6** *Pour  $c \in U$ , le voisinage de  $c_0$  ci-dessus, posons  $a(c) := \chi_c(a_0)$ ,  $\lambda_m(c) := (f_c^m)'(a(c))$  ( $m \in \mathbb{N}$ ), et soit  $\{m(k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  la suite trouvée dans la démonstration du Lemme 2.1, (1) telle que  $\phi(w) = \lim_k f_{c_0}^{m(k)}(a_0 + w/\lambda_{m(k)}(c_0))$ . Alors la suite  $\psi_{m(k)}^c(w) := f_c^{m(k)}(a(c) + w/\lambda_{m(k)}(c))$  converge vers une fonction méromorphe  $\phi^c(w)$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$ . En plus, on a  $\phi^{c_0} = \phi$ , et si on fixe  $w \in \mathbb{C}$ , l'application  $c \mapsto \phi^c(w)$  est holomorphe en  $c = c_0$ .*

**Démonstration.** On peut supposer que le voisinage  $U$  est assez petit tel que  $\lambda_m(c) \geq \kappa(1 + \eta)^m$  pour tout  $c \in U$  et  $m \in \mathbb{N}$ . Soit  $\{m(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  la suite de la démonstration du Lemme 2.1(1) avec  $a_{m(k)} \rightarrow x_0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Par la conjugaison  $f_c \circ \chi_c = \chi_c \circ f_{c_0}$  sur  $X_0$  de Proposition 2.5, on a aussi  $f_c^{m(k)}(a(c)) \rightarrow \chi_c(x_0)$  ( $k \rightarrow \infty$ ) sur  $\chi_c(X_0)$ . De la même façon que dans la démonstration du Lemme 2.1(1), on peut montrer la convergence de  $\{\phi_{m(k)}^c\}_{k \in \mathbb{N}}$  sur  $\mathbb{C}$  et que la fonction  $c \mapsto \phi^c(w)$  est holomorphe sur  $U$  pour chaque  $w \in \mathbb{C}$ . ■(Lemme 2.6)

**Démonstration du Lemme 2.1, (2).** On pose  $c := c_0 + Q\rho_k w$  avec une constante  $Q \in \mathbb{C}^*$ . On pose aussi  $\Phi_k(w) := f_c^{n_k}(c) = f_c^{m(k)+l}(c)$  et  $b(c) := f_c^l(c)$ . Par [RL, Appendix 2] (ou [vS, Thm.1.1]), on a  $b(c) - a(c) = B_0(c - c_0) + o(c - c_0)$  avec  $B_0 \neq 0$ . En utilisant  $\rho_k^{-1} = A_0 \cdot \lambda_{m(k)}(c_0)$ , on a ainsi

$$b(c) = a(c) + B_0 Q \rho_k w + o(\rho_k) = a(c) + \frac{B_0 Q}{A_0} \cdot \frac{\lambda_{m(k)}(c)}{\lambda_{m(k)}(c_0)} \cdot \frac{w}{\lambda_{m(k)}(c)} + o(\rho_k).$$

On prend ici  $Q := A_0/B_0$ . Comme  $X_0$  est compact avec  $0 \notin X_0$ , on a  $|f_c'(\chi_c(x))/f_{c_0}'(x) - 1| = O(c - c_0)$  uniformément pour tout  $x \in X_0$ , donc quand  $m = m(k) \rightarrow \infty$ , on obtient

$$\log \frac{\lambda_m(c)}{\lambda_m(c_0)} = \sum_{i=0}^{m-1} \log \frac{f_c'(f_c^i(a(c)))}{f_{c_0}'(f_{c_0}^i(a(c_0)))} = m \cdot O(c - c_0) = O\left(\frac{m}{\lambda_m(c_0)}\right) \rightarrow 0.$$

(Rappelons que  $X_0$  est hyperbolique, puis  $|\lambda_m(c_0)| \geq \kappa(1 + \eta)^m$ .) Puisque  $\Phi_k(w) = f_c^{m(k)}(b(c))$  et que  $\lim_{c \rightarrow c_0} \phi^c(w) = \phi(w)$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$ , on obtient

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_c^{m(k)} \left( a(c) + \frac{w}{\lambda_{m(k)}(c)} + o(\rho_k) \right) = \phi(w). \quad \blacksquare$$

**Remarque.** Si on démontre les convergences  $\phi_k \rightarrow \phi$  et  $\Phi_k \rightarrow \phi$  juste sur un disque, la démonstration est plus facile. En fait,  $\phi'_k(0) = 1$  et on peut utiliser la normalité des fonctions univalentes sur  $\mathbb{D}(\delta)$ . On a alors une version faible du Lemme 2.1(1). Remarquons que la Proposition 4.3 ([Ha], [MM]) est une généralisation de cette version faible.

### 2.3 Auto-similitude de $J$ aux paramètres faiblement hyperboliques

Nous donnons ici une généralisation du Théorème 2.2(a). D'après Haïssinsky [Ha], on dit que  $c_0 \in \partial M$  est *faiblement hyperbolique* s'il existe un  $d \in \mathbb{N}$  et un  $r > 0$  tels que pour  $D_n := \mathbb{D}(f_{c_0}^n(c_0), r)$  et la composante connexe  $D'_n$  de  $f_{c_0}^{-n}(D_n)$  contenant  $c_0$ ,  $\deg(f_{c_0}^n : D'_n \rightarrow D_n) \leq d$  pour un nombre infini de  $n \in \mathbb{N}$ .

**Théorème 2.7 (Auto-similitude de  $J$ )** *Soit  $c_0 \in \partial M$  faiblement hyperbolique. Alors il existe une fonction holomorphe non constante  $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  avec  $\phi(0) \in J = J(f_{c_0})$  et une suite  $\rho_k \in \mathbb{C}^*$  avec  $\rho_k \rightarrow 0$  telles que pour tout  $0 < r < 1$ ,*

$$[\rho_k^{-1}(J - c_0)]_r \rightarrow [\phi^{-1}(J)]_r \quad (k \rightarrow \infty)$$

dans la topologie de Hausdorff.

**Démonstration.** Par la Proposition 4.3 ([Ha], [MM]) de la section 4, il existe des suites  $n_k \in \mathbb{N}$  avec  $n_k \rightarrow \infty$  et  $\rho_k \in \mathbb{C}^*$  avec  $\rho_k \rightarrow 0$  telles que le polynôme  $\phi_k(w) = f_{c_0}^{n_k}(c_0 + \rho_k w)$  converge vers une fonction holomorphe non constante  $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{D}$ . En particulier,  $\phi(0) = \lim_k f_{c_0}^{n_k}(c_0) \in J$ , donc  $\phi^{-1}(J)$  n'est pas vide. Du coup on peut appliquer la démonstration du Théorème 2.2(a). ■

## 3 Lamination de Lyubich-Minsky

Dans cette section, nous donnons une construction de la lamination de Lyubich-Minsky par le lemme de Zalcman.

Pour une fraction rationnelle  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , M. Lyubich et Y. Minsky ont défini une lamination  $\mathcal{A}_f$  par surfaces de Riemann. À partir de  $\mathcal{A}_f$ , ils ont construit une lamination par 3-variétés hyperboliques comme un analogue des 3-variétés hyperboliques des groupes kleinien, et ils ont démontré un théorème de rigidité en utilisant des méthodes de géométrie hyperbolique. (Voir [LM] ou [KL, Chap. 3].)

L'ingrédient principal de leurs laminations est un ensemble de fonctions méromorphes générées par la dynamique inverse de  $f$ . On montre ici que si  $f$  vérifie une condition (plus générale que la parabolicité), on peut utiliser l'ensemble des fonctions méromorphes générées par le lemme de Zalcman pour la famille  $\mathcal{F} := \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

### 3.1 Construction de la lamination de Lyubich-Minsky

Soit  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  une fraction rationnelle de degré au moins deux. On commence par la construction de la lamination  $\mathcal{A}^{\mathcal{LM}}$  ( $= \mathcal{A}_f$  ci-dessus) due à Lyubich et Minsky.

**Les orbites inverses régulières.** On dit qu'une suite  $\hat{z} = (z_0, z_{-1}, z_{-2}, \dots)$  dans le produit infini  $\widehat{\mathbb{C}}^{\mathbb{N}}$  est une *orbite inverse* de  $f$  si  $f(z_{-n-1}) = z_{-n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On dit qu'une orbite inverse  $\hat{z} = (z_{-n})$  de  $f$  est *régulière* s'il existe un voisinage  $U_0$  de  $z_0$  tel que la suite des antécédents itérés  $\dots \rightarrow U_{-2} \rightarrow U_{-1} \rightarrow U_0$  contenant l'orbite inverse  $\dots \mapsto z_{-2} \mapsto z_{-1} \mapsto z_0$  soit univalente sur  $U_{-n}$  pour tout  $n$  assez grand.

Soit  $\mathcal{R} \subset \widehat{\mathbb{C}}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble de toutes les orbites inverses régulières. Une composante connexe par arcs de  $\mathcal{R}$  est appelée *une feuille*. La feuille contenant  $\hat{z}$  est notée  $L(\hat{z})$ . Les feuilles de  $\mathcal{R}$  sont isomorphes à  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{D}$ , ou à un anneau ([LM, Lemma 3.3, Lemma 3.4]).

Soit  $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}$  l'ensemble de toutes les feuilles  $L(\hat{z})$  de  $\mathcal{R}$  isomorphes à  $\mathbb{C}$ . Par exemple, si la suite  $(z_{-n})$  est donnée par un cycle répulsif, on a  $L(\hat{z}) \simeq \mathbb{C}$ . Si  $L(\hat{z}) \simeq \mathbb{C}$ , il existe une *uniformisation*  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow L(\hat{z})$  ([LM, §4]).

**Fonctions de Lyubich-Minsky.** Soit  $\mathcal{U}$  l'espace de toutes les fonctions méromorphes non constantes de  $\mathbb{C}$ . (La topologie de  $\mathcal{U}$  est celle de la convergence uniforme sur les compacts de  $\mathbb{C}$ .) Nous considérons la classe suivante de fonctions dans  $\mathcal{U}$  qui est très importante dans toute la suite.

Soit  $\pi_0 : \hat{z} = (z_{-n}) \mapsto z_0$  la projection sur  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Lorsqu'on a une uniformisation  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow L(\hat{z})$ , l'application  $\psi = \pi_0 \circ \phi$  est une fonction méromorphe non constante de  $\mathbb{C}$ ; *i.e.*,  $\psi$  est un élément de  $\mathcal{U}$ . Pour une orbite inverse  $\hat{z} = (z_{-n}) \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}$  de  $f$ , on pose

$$\mathcal{LM}(\hat{z}) := \{\psi = \pi_0 \circ \phi \in \mathcal{U} : \exists \phi : \mathbb{C} \rightarrow L(\hat{z}) \text{ uniformisation t.q. } \phi(0) = \hat{z}\}$$

et  $\mathcal{LM} := \bigcup_{\hat{z} \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}} \mathcal{LM}(\hat{z})$ . On dit qu'un élément  $\psi \in \mathcal{LM} \subset \mathcal{U}$  est une *fonction de Lyubich-Minsky* (ou *LM-fonction*).

On note l'ensemble des applications affines (complexes) de  $\mathbb{C}$  par  $\text{Aff}$ . Alors il n'est pas difficile de s'assurer que  $\mathcal{LM}$  satisfait

$$f \circ \mathcal{LM} = \mathcal{LM} = \mathcal{LM} \circ \text{Aff}.$$

Plus précisément, on a :

1. Si  $\psi \in \mathcal{LM}$ , alors  $f \circ \psi \in \mathcal{LM}$  et il existe une  $\psi_1 \in \mathcal{LM}$  telle que  $\psi = f \circ \psi_1$ .
2. Si  $\psi \in \mathcal{LM}$  et  $\delta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est une application affine, alors  $\psi \circ \delta \in \mathcal{LM}$ .

**Construction de la LM-lamination.** Pour construire la lamination de Lyubich-Minsky, on considère plus généralement un sous-ensemble  $\mathcal{K} \neq \emptyset$  de  $\mathcal{U}$  avec

$$f \circ \mathcal{K} = \mathcal{K} = \mathcal{K} \circ \text{Aff}.$$

On définit alors une lamination  $\mathcal{A}^{\mathcal{K}}$  comme suite : soit  $\widehat{\mathcal{U}} := \mathcal{U}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites de la forme

$$\hat{\psi} := (\psi_0, \psi_{-1}, \psi_{-2}, \dots)$$

où  $\psi_{-n} \in \mathcal{U}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Notons  $\widehat{\mathcal{K}}$  l'ensemble des éléments  $\hat{\psi} = (\psi_{-n})$  de  $\widehat{\mathcal{U}}$  tels que  $\psi_{-n} \in \mathcal{K}$  et  $f \circ \psi_{-n} = \psi_{-n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . (En utilisant la propriété  $f \circ \mathcal{K} = \mathcal{K}$ , on a  $\widehat{\mathcal{K}} \neq \emptyset$ .) Alors pour tout  $\hat{\psi} = (\psi_{-n}) \in \widehat{\mathcal{K}}$  il existe une orbite inverse  $\hat{z} = (z_{-n})$  telle que  $\psi_{-n}(0) = z_{-n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On définit les relations d'équivalence suivantes sur  $\mathcal{U}$  et  $\widehat{\mathcal{U}}$  : on dit que deux éléments  $\phi$  et  $\psi$  de  $\mathcal{U}$  sont  $\mathbb{C}^*$ -équivalents s'il existe une constante  $a \in \mathbb{C}^*$  telle que  $\phi(w) = \psi(aw)$  pour tout  $w \in \mathbb{C}$ . On dit aussi que deux éléments  $\hat{\phi}$  et  $\hat{\psi}$  de  $\widehat{\mathcal{U}}$  sont  $\mathbb{C}^*$ -équivalents s'il existe une constante  $a \in \mathbb{C}^*$  telle que  $\phi_{-n}(w) = \psi_{-n}(aw)$  pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $w \in \mathbb{C}$ .

On note  $\mathcal{U}/\mathbb{C}^*$  et  $\widehat{\mathcal{U}}/\mathbb{C}^*$  les espaces quotients de  $\mathcal{U}$  et  $\widehat{\mathcal{U}}$  par ces  $\mathbb{C}^*$ -équivalences. Soit  $\mathcal{A}^{\mathcal{K}}$  l'adhérence de l'ensemble  $\widehat{\mathcal{K}}/\mathbb{C}^*$  dans  $\widehat{\mathcal{U}}/\mathbb{C}^*$ .

En fait, Lyubich et Minsky ont montré que  $\widehat{\mathcal{U}}/\mathbb{C}^*$  est un feuilletage par des orbifolds dont les revêtements universels sont isomorphes à  $\mathbb{C}$  et que  $\mathcal{A}^{\mathcal{K}}$  est une lamination par des orbifolds du même type [LM, §7].

Dans le cas où  $\mathcal{K} = \mathcal{LM}$ , on appelle  $\mathcal{A}^{\mathcal{LM}}$  la *lamination de Lyubich-Minsky* ou *LM-lamination* de la fraction rationnelle  $f$ . La 3-lamination hyperbolique de Lyubich-Minsky de  $f$  est un espace fibré sur  $\mathcal{A}^{\mathcal{LM}}$ .

**Remarque.** Le choix de  $\mathcal{K}$  est important. Par exemple, dans le cas où  $\mathcal{K} = \mathcal{LM}$ , Lyubich et Minsky ont montré que  $\mathcal{A}^{\mathcal{LM}}$  est localement compact si  $f$  est semi-hyperbolique, et ils l'ont utilisé pour la démonstration de leur théorème de rigidité. (La compacité locale n'est pas triviale, car l'espace  $\mathcal{U}$  n'est pas localement compact.)

### 3.2 Lamination de Zalcman

Dans la construction de la lamination  $\mathcal{A}^{\mathcal{K}}$  ci-dessus, on peut prendre pour  $\mathcal{K}$  l'ensemble des fonctions méromorphes générées par le lemme de Zalcman, et ceci permettra de construire une autre lamination, la *lamination de Zalcman*. En fait, la lamination de Lyubich-Minsky est une sous-lamination de la lamination de Zalcman (Théorème 3.2).

**Fonctions de Zalcman.** Soient  $f$  une fonction rationnelle avec  $\deg f \geq 2$ , et  $z_0 \neq \infty$  un point dans l'ensemble de Julia  $J = J(f)$ . D'après Steinmetz [Ste], on dit qu'un élément  $\psi \in \mathcal{U}$  est une *fonction de Zalcman* (ou *Z-fonction*) de  $f$  en  $z_0$  si  $\psi$  est une limite de la suite donnée par le lemme de Zalcman (Lemme 0.1) pour la restriction de  $\mathcal{F} = \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  au voisinage de  $z_0$ . Plus précisément, il existe des suites  $\rho_k \rightarrow 0, z_k \rightarrow z_0, n_k \rightarrow \infty$  telles que  $f^{n_k}(z_k + \rho_k w)$  converge vers  $\psi(w)$  quand  $k \rightarrow \infty$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$ .

Soit  $\mathcal{Z}(z_0) = \mathcal{Z}_f(z_0)$  l'ensemble des fonctions de Zalcman de  $f$  en  $z_0$ . Quand  $\infty \in J$ , on définit  $\mathcal{Z}(\infty)$  par

$$\mathcal{Z}(\infty) := \{1/\phi : \phi \in \mathcal{Z}_F(0)\},$$

où  $F$  est la fraction rationnelle définie par  $F(z) := 1/f(1/z)$ . Alors l'ensemble des

fonctions de Zalcman de  $f$  est donné par

$$\mathcal{Z} := \bigcup_{z_0 \in J} \mathcal{Z}(z_0).$$

**Remarque.** Dans le lemme de Zalcman, les fonctions de la forme  $\psi_k(w) = f^{n_k}(z_k + \rho_k w)$  ne sont pas essentielles pour représenter la limite  $\psi = \lim \psi_k \in \mathcal{Z} - \mathcal{Z}(\infty)$ . Par exemple, on peut remplacer  $\psi_k$  par  $f^{n_k}(z_k + \rho_k w + e_k(w))$  où  $e_k(w) = o(\rho_k)$  sur tout compact de  $\mathbb{C}$ . Cela suggère qu'on peut représenter toute  $\phi \in \mathcal{Z}$  comme une limite de  $f^{n_k} \circ T_k(\rho_k w)$  où  $T_k : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  est une rotation sphérique telle que  $T_k(0) = z_k$ .

**Invariance de  $\mathcal{Z}$ .** Il n'est pas difficile de montrer :

**Proposition 3.1** *L'ensemble  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{U}$  satisfait*

$$f \circ \mathcal{Z} = \mathcal{Z} = \mathcal{Z} \circ \text{Aff}.$$

Une démonstration de cette proposition se trouve dans [Ste].

**Lamination de Zalcman.** En vertu de la Proposition 3.1, on peut poser  $\mathcal{K} = \mathcal{Z}$  dans la construction de la lamination  $\mathcal{A}^{\mathcal{K}}$  ci-dessus. On appelle  $\mathcal{A}^{\mathcal{Z}}$  la *lamination de Zalcman* ou *Z-lamination* de  $f$ . Alors la Z-lamination contient la LM-lamination :

**Théorème 3.2** *L'ensemble  $\mathcal{LM}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{Z}$ . On a donc l'inclusion  $\mathcal{A}^{\mathcal{LM}} \subset \mathcal{A}^{\mathcal{Z}}$ .*

Pour la démonstration on utilise une caractérisation de LM-fonctions :

**Proposition 3.3 (Caractérisation de LM-fonctions)** *Soient  $\hat{z} = (z_{-n})_{n \geq 0}$  une orbite inverse de  $f$  et  $\psi$  une fonction méromorphe non constante de  $\mathbb{C}$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $\hat{z} \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}$  et  $\psi \in \mathcal{LM}(\hat{z})$ .
- (2) *Il existe des suites  $n_k \in \mathbb{N}$ ,  $\rho_k \in \mathbb{C}^*$  avec  $\rho_k \rightarrow 0$ , et des rotations sphériques  $T_k : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  avec  $T_k(0) = z_{-n_k}$  telles que*

$$\psi_k(w) := f^{n_k} \circ T_k(\rho_k w)$$

*converge vers  $\psi(w)$  sur tout compact de  $\mathbb{C}$ .*

En vertu du [KL, Lemma 3.6], on sait que (1) implique (2). En fait, on utilise seulement l'implication (1)  $\implies$  (2) dans la démonstration du Théorème 3.2.

**Démonstration. (Proposition 3.3)** Il suffit de montrer que (2)  $\implies$  (1). Supposons qu'il existe des suites  $n_k \rightarrow \infty$ ,  $\rho_k \rightarrow 0$ , et des rotations sphériques  $T_k$  avec  $T_k(0) = z_{-n_k}$ , et la fonction  $f^{n_k} \circ T_k(\rho_k w)$  converge vers  $\psi$  sur tout compact de  $\mathbb{C}$ . Comme  $\psi(w) = \lim_k f^{n_k} \circ T_k(\rho_k w)$  et la famille  $\{f^{n_k} \circ T_k(\rho_k w)\}_{k \in \mathbb{N}}$  est normale, pour tout  $m \in \mathbb{N}$  la



famille  $\{f^{n_k-m} \circ T_k(\rho_k w)\}_{k \in \mathbb{N}}$  est normale aussi. Ainsi on peut trouver une fonction  $\psi_{-m} \in \mathcal{U}$  telle que  $f^m \circ \psi_{-m} = \psi$ . En particulier,  $\psi_{-m}(0) = f^{n_k-m}(z_{-n_k}) = z_{-m}$ .

Le degré local  $\deg(f^m, z_{-m})$  est uniformément borné, car

$$\deg(\psi, 0) = \deg(f^m, z_{-m}) \deg(\psi_{-m}, 0) \geq \deg(f^m, z_{-m}).$$

Donc l'orbite inverse  $\hat{z}$  est régulière.

Ensuite on montrera  $\hat{z} \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}$  : pour  $a \in \mathbb{C}$  posons  $\delta_a(w) := w + a$ . Alors  $(\psi_{-m} \circ \delta_a)_{m \in \mathbb{N}} \in \widehat{\mathcal{U}}$ , et l'application  $h : a \mapsto (\psi_{-m} \circ \delta_a(0))_{m \in \mathbb{N}}$  est une application holomorphe non constante de  $\mathbb{C}$  sur  $L(\hat{z})$ . Comme les feuilles de  $\mathcal{R}$  sont isomorphes à  $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ , ou à un anneau,  $L(\hat{z})$  doit être isomorphe à  $\mathbb{C}$ . On a donc  $\hat{z} \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}$ .

Maintenant on peut prendre une uniformisation  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow L(\hat{z})$  avec  $\phi(0) = \hat{z}$ . Posons  $\tilde{\psi} := \pi_0 \circ \phi \in \mathcal{LM}(\hat{z})$ . En utilisant [KL, Lemma 3.6], on peut trouver une suite  $\tilde{\rho}_k \in \mathbb{C}^*$  telle que  $\tilde{\psi}(w) = \lim_k \tilde{g}_k(w)$  avec  $\tilde{g}_k(w) := f^{n_k} \circ T_k(\tilde{\rho}_k w)$ .

Posons  $g_k(w) := f^{n_k} \circ T_k(\rho_k w)$  et  $\lambda_k := \rho_k / \tilde{\rho}_k$  tels qu'on a  $g_k(w) = \tilde{g}_k(\lambda_k w)$ . Comme les suites  $g_k$  et  $\tilde{g}_k$  ont leurs limites non constantes  $\psi$  et  $\tilde{\psi}$ ,  $\lambda_k$  converge vers un  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Ainsi on a  $\psi(w) = \tilde{\psi}(\lambda w)$  où  $\tilde{\psi}(\lambda w) \in \mathcal{LM}(\hat{z})$ , et on obtient donc  $\psi \in \mathcal{LM}(\hat{z})$ . ■

**Démonstration du Théorème 3.2.** Soit  $\psi$  une LM-fonction. Il existe donc une orbite inverse  $\hat{z} = (z_{-n})_{n \geq 0} \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}$  telle que  $\psi \in \mathcal{LM}(\hat{z})$ . Si la suite  $\{z_{-n}\}_{n \geq 0}$  a un point d'adhérence dans  $J = J(f)$ , on a clairement  $\psi \in \mathcal{Z}$  par la Proposition 3.3, (2). Sinon tout point d'adhérence est un point périodique attractif ou contenu dans un domaine de rotation. Dans ces deux cas, toute limite de  $\psi_k(w) = f^{n_k} \circ T_k(\rho_k w)$  est une fonction de  $\mathbb{C}$  sur l'ensemble de Fatou. Mais c'est contradictoire avec le théorème de Picard. ■

### 3.3 Coïncidence

Il semble possible que l'adhérence de  $\mathcal{LM}$  dans  $\mathcal{U}$  et celle de  $\mathcal{Z}$  coïncident, mais on n'a pas de preuve. On montre ici une condition suffisante pour les égalités  $\mathcal{Z} = \mathcal{LM}$  et  $\mathcal{A}^{\mathcal{Z}} = \mathcal{A}^{\mathcal{LM}}$ . En d'autres termes, cette condition permet de construire la lamination de Lyubich-Minsky à partir du lemme de Zalcman.

**Grande orbite univalente.** La *grande orbite univalente*  $UGO(z_0)$  de  $z_0$  est l'ensemble des points  $\zeta \in \widehat{\mathbb{C}}$  tels que  $f^m(z_0) = f^n(\zeta)$  pour des entiers  $m, n \in \mathbb{N}$  et tels qu'il existe une branche  $g$  de  $f^{-n} \circ f^m$  définie dans un voisinage de  $z_0$  avec  $g(z_0) = \zeta$  et  $g'(z_0) \neq 0$ .

Soit  $P$  l'ensemble post-critique de  $f$ , *i.e.*, l'adhérence des orbites critiques.

**Théorème 3.4 (Coïncidence des laminations)** *Si  $f$  vérifie la condition (\*) suivante, on a l'égalité  $\mathcal{Z} = \mathcal{LM}$  :*

(\*) *Pour tout  $z_0 \in J$ , il existe un  $z'_0 \in UGO(z_0) - P$ .*

*En particulier, la  $Z$ -lamination  $\mathcal{A}^{\mathcal{Z}}$  coïncide avec la LM-lamination  $\mathcal{A}^{\mathcal{LM}}$ .*

Par exemple, toute fraction rationnelle hyperbolique satisfait la condition (\*). Un peu plus généralement, cette condition est satisfaite si la fraction rationnelle est parabolique (*i.e.*  $J$  n'a pas de point critique). Une classe d'exemples intéressante de fonctions satisfaisant (\*) est celle des polynômes quadratiques infiniment renormalisables. (Voir Proposition 3.7.) Donc dans ces cas, on peut construire la LM-lamination à partir du lemme de Zalcman.

Mais la condition (\*) n'est pas vérifiée si  $f$  est un polynôme de Chebychev ou un exemple de Lattès. (Par exemple, posons  $f(z) = z^2 - 2$  et  $z_0 = 2$ .) Si on a  $J = P$ , alors  $f$  ne vérifie pas (\*) aussi.

Pour démontrer le théorème, on montre :

**Lemme 3.5** *Pour tous  $z_0 \in J$  et  $\zeta_0 \in UGO(z_0)$ , on a  $\mathcal{Z}(z_0) = \mathcal{Z}(\zeta_0)$ .*

**Démonstration.** En utilisant une conjugaison, nous pouvons supposer que  $z_0$  et  $\zeta_0$  ne sont pas  $\infty$ . Prenons une fonction  $\psi(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(z_k + \rho_k w) \in \mathcal{Z}(z_0)$  avec  $n_k \rightarrow \infty$ ,  $z_k \rightarrow z_0$ , et  $\rho_k \rightarrow 0$ . Soit  $g$  la branche univalente de  $f^{-n} \circ f^m$  telle que  $g(z_0) = \zeta_0$ . Par un théorème de Koebe, on a  $g(z) = \zeta_k + A_k(z - z_k) + o(z - z_k)$  où  $\zeta_k = g(z_k)$  et  $A_k = g'(z_k) \asymp g'(z_0) \neq 0$  pour tout  $k \gg 0$ . Par suite

$$f^{n_k} \circ g^{-1} \circ g(z_k + \rho_k w) = f^{n_k - m + n}(\zeta_k + A_k \rho_k w + o(\rho_k))$$

dans tout compact du  $w$ -plan. Comme  $\zeta_k \rightarrow \zeta_0$  quand  $k \rightarrow \infty$ , on obtient  $\psi \in \mathcal{Z}(\zeta_0)$ . ■

Ensuite on montre :

**Lemme 3.6** *Pour tout  $\zeta_0 \in J - P$ , l'ensemble  $\mathcal{Z}(\zeta_0)$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{LM}$ .*

**Démonstration.** Soit  $\psi(w) := \lim f^{n_k}(\zeta_k + \rho_k w) \in \mathcal{Z}(\zeta_0)$  avec  $n_k \rightarrow \infty$ ,  $\zeta_k \rightarrow \zeta_0$ , et  $\rho_k \rightarrow 0$ . Supposons d'abord qu'on puisse extraire une sous-suite telle que  $\zeta_k \in J$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . L'ensemble de Julia  $J$  peut être arbitrairement approché par  $f^{-m}(\{z\})$  dans la topologie de Hausdorff quand  $z \in J$  et  $m \rightarrow \infty$ . Donc on peut choisir un point  $z_0 \in J$  et une orbite inverse  $\hat{z} = (z_{-m})$  tels que pour tout  $k$  il existe un  $m_k \in \mathbb{N}$  suffisamment grand par rapport à  $n_k$  tel que  $z_{-n_k} = f^{m_k - n_k}(z_{-m_k}) = \zeta_k + o(|\rho_k|)$ . (Car  $J$  n'a pas de point isolé.)

Comme  $\zeta_0 \notin P$  par hypothèse, il existe un disque  $D_0$  centré en  $\zeta_0$  et une branche univalente  $g_k : D_0 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  de  $f^{-(m_k - n_k)}$  telle que  $g_k(z_{-n_k}) = z_{-m_k}$ . Le multiplicateur  $\lambda_k := g'_k(\zeta_0)$  satisfait  $\liminf \lambda_k = 0$  par la normalité de  $\{g_k|_{D_0}\}$ . Fixons un  $r > 0$  arbitrairement grand. Pour tout  $k \gg 0$  (assez grand), le disque  $D_k := \mathbb{D}(\zeta_k, r|\rho_k|)$  est contenu dans  $D_0$  et  $z_{-n_k} \in D_k$ . Par un théorème de Koebe, pour tout  $z \in g_k(D_k)$ , on a  $|z - z_{-m_k}| = O(\rho_k \lambda_k)$ . Donc on peut écrire  $f^{m_k - n_k}|_{g_k(D_k)}$  comme  $Z = f^{m_k - n_k}(z) = z_{-n_k} + a_k(z - z_{-m_k}) + O(\rho_k^2 \lambda_k^2)$  avec  $a_k \asymp \lambda_k^{-1} \rightarrow \infty$  (en utilisant le théorème de Koebe encore une fois). Par suite, on a  $g_k(Z) = z_{-m_k} + (Z - \zeta_k)/a_k + o(|\rho_k/a_k|)$  et

$$\psi(w) = \lim f^{m_k} \circ g_k(\zeta_k + \rho_k w) = \lim f^{m_k}(z_{-m_k} + \rho_k/a_k(w + o(1))).$$

On obtient donc  $\psi \in \mathcal{LM}$ .

Ensuite, supposons que  $\zeta_k \notin J$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  assez grand. Soit  $R_k := \text{dist}_{\mathbb{C}}(\zeta_k, J)$ . Si  $R_k > r|\rho_k|$  pour tous  $r > 0$  et  $k$  assez grand, l'ensemble de Fatou contient le disque  $D_k = \mathbb{D}(\zeta_k, r|\rho_k|)$ , et donc  $\psi$  est une fonction de  $\mathbb{C}$  sur l'ensemble de Fatou. C'est contradictoire avec le théorème de Picard. Donc il existe un  $r_0 > 0$  et un nombre infini de  $k$  tels que  $R_k \leq r_0|\rho_k| \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Prenons  $\zeta'_k \in J$  avec  $|\zeta_k - \zeta'_k| = R_k$ . Soit  $\delta_k := \zeta_k - \zeta'_k$ . Comme  $|\delta_k/\rho_k| = R_k/|\rho_k| \leq r_0$ , on peut trouver un  $a \in \mathbb{D}(r_0)$  et une sous-suite de  $\{k\}$  avec  $\delta_k/\rho_k \rightarrow a$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Alors

$$f^{n_k}(\zeta'_k + \rho_k(w + a)) = f^{n_k}(\zeta'_k + \rho_k(w + \delta_k/\rho_k + o(1))) = f^{n_k}(\zeta_k + \rho_k w + o(\rho_k))$$

et on a donc  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(\zeta'_k + \rho_k w) = \psi(w - a)$ . Comme  $\zeta'_k \in J$  et  $\zeta'_k \rightarrow \zeta_0$ , on obtient  $\psi(w - a) \in \mathcal{LM}$ , et donc  $\psi(w) \in \mathcal{LM}$ . (Rappelons que  $\mathcal{LM} = \mathcal{LM} \circ \text{Aff}$ .) ■

**Démonstration du Théorème 3.4.** Comme  $\mathcal{LM} \subset \mathcal{Z}$  (le Théorème 3.2), il suffit de montrer que  $\mathcal{Z}(z_0) \subset \mathcal{LM}$  pour tout  $z_0 \in J$ . Supposons que la fonction  $f$  vérifie la condition (\*) et fixons  $z_0 \in J$  avec  $z'_0 \in UGO(z_0) - P$ . Alors on obtient le théorème en posant  $\zeta_0 := z'_0$  dans ces deux lemmes. ■

**Question.** Le problème suivant n'est pas encore résolu : *Sous quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité  $\mathcal{Z} = \mathcal{LM}$  (ou  $\mathcal{A}^{\mathcal{Z}} = \mathcal{A}^{\mathcal{LM}}$ ) ?*

Remarquons que, en fait, la condition  $\zeta_0 \in UGO(z_0)$  du Lemme 3.5 n'est pas optimale pour avoir  $\mathcal{Z}(z_0) = \mathcal{Z}(\zeta_0)$ . Voir [Ste, Theorem 4]. Donc on peut remplacer (\*) par une condition un peu plus faible (mais plus compliquée!).

### 3.4 Polynômes quadratiques infiniment renormalisables

On donne une démonstration de :

**Proposition 3.7** *Les polynômes quadratiques  $f_c(z) = z^2 + c$  infiniment renormalisables satisfont la condition (\*). Donc on a  $\mathcal{A}^{\mathcal{LM}} = \mathcal{A}^{\mathcal{Z}}$ .*

**Démonstration.** Supposons que  $f(z) = z^2 + c$  est infiniment renormalisable. Comme tout les points périodiques de  $f$  sont répulsifs et l'ensemble post-critique  $P$  ne contient pas les points périodiques (voir [Mc1, Thm. 8.1]), il existe un voisinage  $U$  du point fixé répulsif  $\beta \in J$  de  $f$  avec  $U \cap P = \emptyset$ . Donc il existe un  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $J \subset f^n(U)$ .

Pour  $z_0 \in J$ , s'il existe un  $w_0 \in U$  tel que  $f^n(w_0) = z_0$  et  $(f^n)'(w_0) \neq 0$ , alors  $w_0 \in UGO(z_0) - P$ . Sinon  $f^n(w_0) = z_0$  et  $(f^n)'(w_0) = 0$ . Dans ce cas il y a un entier  $k \leq n$  tel que  $z_0$  est l'image du point critique  $z = 0$  par  $f^k$ . On peut alors trouver une renormalisation  $g = f^p|_{V'} : V' \rightarrow V$  avec  $z_0 \in V' \Subset V$ , dont le petit ensemble de Julia  $J_0 = \bigcap_{j \geq 0} g^{-j}(V) \subsetneq J$  satisfait  $f^p(J_0) = J_0$ ;  $z_0 \in J_0$ ; et  $P \subset \bigcup_{i=1}^p f^i(J_0)$ . (Voir par exemple [Mc1, §10.1].) Alors  $J_0$  ou  $f(J_0)$  ne contient pas la valeur critique  $f(0) = c$ , et il existe un des composantes  $L$  de  $f^{-1}(J_0)$  ou  $f^{-1}(f(J_0))$  tel que  $L \neq f^i(J_0)$  ( $1 \leq i \leq p$ ) et  $L \cap P = \emptyset$ . Donc on peut trouver un  $z'_0 \in L$  avec  $f(z'_0) = z_0$  ou  $f(z'_0) = f(z_0)$ , et  $z'_0 \in UGO(z_0) - P$ . ■

### 3.5 Une question de Steinmetz

Dans [Ste], Steinmetz pose plusieurs questions sur l'espace  $\mathcal{Z}$  des Z-fonctions. Une de ses questions est la suivante : *Pour une fonction  $f$  donnée, peut-on déterminer l'ensemble  $\{\zeta \in J : \mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\zeta)\}$  ?* Comme un corollaire de la démonstration du Théorème 3.4, on donne une condition suffisante pour que l'ensemble soit  $J$  :

**Théorème 3.8** *Si  $f$  satisfait (\*) du Théorème 3.4, alors on a  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\zeta)$  pour tout  $\zeta \in J$ .*

C'est une amélioration du [Ste, Thm.5].

**Démonstration.** Par le Lemme 3.5, pour tout  $z_0 \in J$ , il existe un  $\zeta_0 \in (J - P) \cap UGO(z_0)$  avec  $\mathcal{Z}(z_0) = \mathcal{Z}(\zeta_0)$ .

Fixons un point arbitraire  $\zeta$  dans l'ensemble de Julia. Alors on peut prendre l'orbite inverse  $\hat{z} = (z_{-n})$  comme dans la démonstration du Lemme 3.6 telle que  $z_{-m_k}$  converge vers  $\zeta$ . Par suite  $\mathcal{Z}(z_0) = \mathcal{Z}(\zeta_0) \subset \mathcal{Z}(\zeta)$ . En prenant la réunion sur tous les points  $z_0 \in J$ , on obtient  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}(\zeta)$ . L'autre inclusion est évidente. ■

## 4 Caractérisations de points coniques

Ensuite on considère des points coniques dans l'ensemble de Julia pour une fraction rationnelle  $f$  de degré au moins deux. Il y a plusieurs définitions des points coniques (voir [Pr]), et chacune d'elles est liée à la propriété d'expansion dans l'ensemble de Julia. Dans cette section, on compare la notion de point conique définie par Lyubich et Minsky [LM], avec celle par Martin et Mayer [MM] dans le contexte unifié des laminations.

### 4.1 Points LM-coniques

**Dynamique sur la lamination.** Les points coniques de Lyubich-Minsky sont définis en terme de la dynamique sur la LM-lamination  $\mathcal{A}^{\mathcal{LM}}$ . Il existe une action inversible  $\hat{f} : \hat{\mathcal{U}} \rightarrow \hat{\mathcal{U}}$  définie par  $\hat{f} : (\psi_{-n}) \mapsto (f \circ \psi_{-n})$ . Les LM- et Z-laminations héritent de cette action, notée  $\hat{f} : \mathcal{A}^{\mathcal{LM}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{LM}}$  et  $\hat{f} : \mathcal{A}^{\mathcal{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{Z}}$ . (En fait, la projection canonique de  $\hat{\mathcal{U}}$  sur  $\hat{\mathcal{U}}/\mathbb{C}^*$  et la post-composition par  $f$  sont commutatifs pour tout élément de  $\hat{\mathcal{U}}$ .)

Pour tout  $[\hat{\psi}] \in \hat{\mathcal{U}}/\mathbb{C}^*$  avec un représentant  $\hat{\psi} = (\psi_0, \psi_{-1}, \dots) \in \hat{\mathcal{U}}$ , la valeur  $\psi_0(0)$  dans  $\hat{\mathbb{C}}$  ne dépend pas du choix du représentant. On dit que l'application  $\hat{\pi} : \hat{\mathcal{U}}/\mathbb{C}^* \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  définie par  $\hat{\pi}([\hat{\psi}]) := \psi_0(0)$  est la *projection*. Remarquons que la dynamique  $\hat{f} : \hat{\mathcal{U}}/\mathbb{C}^* \rightarrow \hat{\mathcal{U}}/\mathbb{C}^*$  est semi-conjuguée à la dynamique originale  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  par  $\hat{\pi}$ .

**Points LM-coniques.** En analogie avec les groupes kleiniens, Lyubich et Minsky ont défini les *points coniques* dans  $\mathcal{A}^{\mathcal{LM}} \cap \hat{\pi}^{-1}(J)$ , où  $J = J(f)$  :

**Définition. (Points coniques dans la lamination, [LM, §8])** Un point  $\tilde{z}$  dans  $\mathcal{A}^{\mathcal{L}\mathcal{M}} \cap \hat{\pi}^{-1}(J)$  est appelé *conique* si l'orbite  $\{\tilde{z}, \hat{f}(\tilde{z}), \hat{f}^2(\tilde{z}), \dots\}$  a un point d'adhérence dans  $\mathcal{A}^{\mathcal{L}\mathcal{M}}$ .

Dans cet article, nous appliquons cette définition à la  $\mathbb{Z}$ -lamination  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  à la place de  $\mathcal{A}^{\mathcal{L}\mathcal{M}}$ . (Comme elles coïncident souvent par Théorème 3.4.) De plus, on définit les points coniques dans l'ensemble de Julia :

**Définition. (Points coniques de Lyubich-Minsky, modifiés)** Un point  $z_0$  dans l'ensemble de Julia est appelé *LM-conique* s'il existe un élément  $\tilde{z} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  tel que  $\hat{\pi}(\tilde{z}) = z_0$ , et tel que l'orbite  $\{\tilde{z}, \hat{f}(\tilde{z}), \hat{f}^2(\tilde{z}), \dots\}$  ait un point d'adhérence dans  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ .

Pour distinguer d'autres définitions de point conique, on dit que le point conique ci-dessus est *LM-conique*, et on note  $\Lambda_{LM} \subset J$  l'ensemble des points LM-coniques.

Une propriété importante de  $\Lambda_{LM}$  est :

**Théorème 4.1 (Lyubich-Minsky, rigidité de  $\Lambda_{LM}$ )** *Si  $\Lambda_{LM}$  d'une fraction rationnelle  $f$  a un champ de droites invariant, alors  $f$  est un exemple de Lattès.*

Pour les terminologies, voir par exemple [Ha, MM]. Pour la démonstration, voir [LM, Prop. 8.9]. (Malgré l'usage de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  à la place de  $\mathcal{A}^{\mathcal{L}\mathcal{M}}$ , la démonstration est la même.) Lyubich et Minsky ont aussi montré que toute fraction rationnelle semi-hyperbolique (*convexe co-compacte* dans leur terminologie) satisfait  $J = \Lambda_{LM}$  et on a la rigidité sur l'ensemble de Julia.

**Autres caractérisations des points LM-coniques.** On donnera d'autres caractérisations importantes de  $\Lambda_{LM}$  :

**Théorème 4.2 (Points LM-coniques)** *Pour  $z_0 \in J$ , les assertions suivantes sont équivalentes :*

(LM1) *il existe une fonction  $\phi \in \mathcal{Z}(z_0)$  de la forme*

$$\phi(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(z_0 + \rho_k w)$$

*où la convergence est uniforme sur tout compact de  $\mathbb{C}$ .*

(LM2)  *$z_0$  est LM-conique.*

(LM3) *pour tout élément  $\tilde{z} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  avec  $\hat{\pi}(\tilde{z}) = z_0$ , l'orbite  $\{\tilde{z}, \hat{f}(\tilde{z}), \hat{f}^2(\tilde{z}), \dots\}$  a un point d'adhérence dans  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ .*

Si  $z_0 = \infty$  dans (LM1), on utilise  $F(z) = 1/f(1/z)$  au lieu de  $f$ .

**Démonstration.** D'abord on montre (LM2)  $\implies$  (LM1) : supposons que  $\tilde{z} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  satisfasse  $\hat{f}^{n_k}(\tilde{z}) \rightarrow \tilde{\zeta} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ . Soient  $\hat{\psi} = (\psi_{-n})$  et  $\hat{\phi} = (\phi_{-n})$  des représentants de  $\tilde{z}$  et  $\tilde{\zeta}$  dans  $\hat{\mathcal{U}}$ . Alors il existe  $\lambda_k \in \mathbb{C}^*$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  fixé,

$$f^{n_k} \circ \psi_{-N} \circ \lambda_k \rightarrow \phi_{-N} \quad (k \rightarrow \infty)$$

uniformément sur tout disque  $D \subset \mathbb{C}$ . (Ici  $\lambda_k$  est l'application  $\lambda_k : w \mapsto \lambda_k w$ .) Si  $\lambda_k \asymp 1$ , il existe un ouvert  $U$  tel que  $U \cap J \neq \emptyset$  et  $U \subset \psi_{-N} \circ \lambda_k(D)$  pour tout  $k \gg 0$  (où  $N$  est fixé), et donc on n'a pas la convergence ci-dessus. Par suite  $\lambda_k$  tend vers 0.

Posons  $N = 0$ . Alors il existe un  $A_0 \neq 0$  et  $p \geq 1$  tels que  $\psi_0(z) = z_0 + A_0 z^p + o(z^p)$  près  $z = 0$  et on a donc

$$\psi_0(\lambda_k w) = z_0 + A_0 \lambda_k^p w^p + o(\lambda_k^p)$$

dans  $D$  pour tout  $k \gg 0$ . Du coup

$$\phi_0(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k} \circ \psi_0 \circ \lambda_k(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(z_0 + A_0 \lambda_k^p w^p).$$

Donc il existe  $\phi(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(z_0 + \rho_k w) \in \mathcal{Z}(z_0)$  avec  $\rho_k = A_0 \lambda_k^p \rightarrow 0$  et  $\phi_0(w) = \phi(w^p)$ .

Ensuite on montre (LM1)  $\implies$  (LM3). Prenons  $\tilde{z} \in \mathcal{A}^{\mathcal{Z}}$  avec  $\hat{\pi}(\tilde{z}) = z_0$  et un de ses représentants  $\hat{\psi} = (\psi_{-n}) \in \hat{\mathcal{U}}$ . Alors on a

$$\psi_0(w) = z_0 + A_0 w^p + o(w^p)$$

près de  $w = 0$ . On peut supposer que  $A_0 = 1$  en remplaçant le représentant  $\hat{\psi}$  par  $\hat{\psi} \circ A_0^{1/p}$ . Par hypothèse, il existe une  $\phi(w) = \lim_k f^{n_k}(z_0 + \rho_k w) \in \mathcal{Z}$  où  $n_k \rightarrow \infty$ ,  $\rho_k \rightarrow 0$ . On a donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k} \circ \psi_0 \circ \rho_k^{1/p}(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(z_0 + \rho_k w^p + o(\rho_k)) = \phi(w^p) =: \phi_0(w)$$

dans tout grand disque. En d'autres termes, la suite  $\{f^{n_k} \circ \psi_0 \circ \rho_k^{1/p}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}$  converge vers  $\phi_0(w) \in \mathcal{U}$ . Comme l'espace  $\mathcal{A}^{\mathcal{Z}}$  est fermé, la suite  $[f^{n_k} \circ \psi_0] \in \mathcal{A}^{\mathcal{Z}}$  converge vers  $[\phi_0] \in \mathcal{A}^{\mathcal{Z}}$  dans la topologie de  $\mathcal{U}/\mathbb{C}^*$ . On peut appliquer le même argument à tout  $\psi_{-n}$ , et ainsi on peut trouver une limite de  $\hat{f}^{n_k}(\tilde{z})$  dans  $\mathcal{A}^{\mathcal{Z}}$ .

Enfin, l'implication (LM3)  $\implies$  (LM2) est évidente. ■

**Remarque.** D'après la démonstration tout point d'adhérence de l'orbite  $\{\hat{f}^n(\tilde{z})\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans (LM3) a un représentant de la forme  $\phi_{-m}(w^p) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k - m}(z_0 + \rho_k w^p)$ . Comme Lyubich et Minsky ont remarqué, cela est considéré comme un effet de la variété stable locale de la dynamique  $\hat{f} : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ .

## 4.2 Points MM-coniques

**Théorème de Haïssinsky-Martin-Mayer sur la rigidité.** Il y a un amélioration du théorème de Lyubich-Minsky dû à Haïssinsky [Ha], Martin et Mayer [MM]. D'abord on présente une autre définition du point conique dans [MM]. (L'importance de la condition ci-dessus était aussi remarquée par Astala-Haïssinsky [Ha] et Steinmetz [Ste].)

**Définition. (Points coniques de Martin-Mayer)** On dit qu'un point  $z_0 \neq \infty$  dans l'ensemble de Julia est *MM-conique* s'il existe des suites  $n_k \in \mathbb{N}$  et  $\rho_k \in \mathbb{C}^*$  avec  $\rho_k \rightarrow 0$  telles que la fonction  $\psi_k(w) = f^{n_k}(z_0 + \rho_k w)$  converge vers une fonction méromorphe non constante  $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{D}$ .

On dit aussi que  $z_0 = \infty$  est MM-conique si 0 est un point MM-conique de la fraction rationnelle  $F(w) = 1/f(1/w)$ . (Alors la notion de point MM-conique est invariante par des changements de coordonnées.) On note  $\Lambda_{MM}$  l'ensemble des points MM-coniques.

Remarquons que cette définition est une variante de (LM1). La différence essentielle est que le domaine de  $\psi = \lim \psi_k$  ne doit pas être  $\mathbb{C}$ .

**Proposition 4.3 (Caractérisation topologique des points MM-coniques)** *Pour  $z_0 \in J$ , les assertions suivantes sont équivalentes :*

(MM0) *il existe un  $d \in \mathbb{N}$  et un  $r > 0$  tels que pour  $D_n := \mathbb{B}(f^n(z), r)$  et la composante connexe  $D'_n$  de  $f^{-n}(D_n)$  contenant  $z_0$ ,  $\deg(f^n : D'_n \rightarrow D_n) \leq d$  pour un nombre infini de  $n \in \mathbb{N}$ .*

(MM1)  *$z_0$  est MM-conique.*

On note ici  $\mathbb{B}(x, r)$  le disque sphérique de rayon  $r$  dont le centre est  $x$ . Pour la démonstration, voir [Ha, MM]. Comme (MM1) est plus faible que (LM1), on a

**Proposition 4.4**  $\Lambda_{LM} \subset \Lambda_{MM}$ .

L'implication (LM2)  $\implies$  (MM0) est équivalente à la proposition, et déjà remarqué dans [LM, Prop.8.7].

Voici une amélioration du Théorème 4.1 ([Ha, Prop. 5.2] and [MM, Thm.1.2]) :

**Théorème 4.5 (Rigidité par Haïssinsky, Martin-Mayer)** *Si  $\Lambda_{MM}$  d'une fraction rationnelle  $f$  a un champ de droites invariant, alors  $f$  est un exemple de Lattès.*

Dans la suite, pour comparer les définitions de point conique on introduit un nouvel espace topologique dans l'esprit de la lamination de Lyubich-Minsky.

### 4.3 Espace des germes et points MM-coniques

**L'espace des germes.** Nous essayons de modifier la construction de la  $Z$ -lamination. L'idée essentielle est « la topologie des germes » introduite par [KL]. (On peut aussi trouver une idée similaire dans [BS].) Soit  $\mathcal{V}$  l'ensemble des fonctions méromorphes non constantes définies (au moins) dans un disque centré à l'origine. Nous considérons tout élément  $\psi \in \mathcal{V}$  comme un germe en 0, donc on ignore son domaine maximal.

On dit qu'une suite  $\psi_n \in \mathcal{V}$  converge vers  $\psi \in \mathcal{V}$  s'il existe un disque  $D$  centré à  $w = 0$  tel que  $\psi|_D$  et  $\psi_n|_D$  soient définies pour tout  $n \gg 0$ , et que  $\psi_n$  converge vers  $\psi$  uniformément dans  $D$ .

Soit  $f$  une fraction rationnelle. Évidemment  $f \circ \psi(w) \in \mathcal{V}$  et  $\psi(aw) \in \mathcal{V}$  pour tous  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $\psi \in \mathcal{V}$ . On a donc une action  $f \circ : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ , et le quotient  $\mathcal{V}/\mathbb{C}^*$  est bien défini.

Nous considérons maintenant  $\mathcal{Z}$  comme un sous-ensemble de  $\mathcal{V}$ . On définit *l'espace des germes de Zalcman* par l'adhérence de  $\mathcal{Z}/\mathbb{C}^*$  dans  $\mathcal{V}/\mathbb{C}^*$ , noté par  $\mathcal{G}^{\mathcal{Z}}$ . C'est-à-dire que  $\mathcal{G}^{\mathcal{Z}}$  est l'ensemble de tous les germes générés par le principe du lemme de Zalcman. (On peut construire l'espace des germes dans  $\mathcal{V}^{\mathbb{N}}/\mathbb{C}^*$  avec une dynamique inversible, mais la caractérisation de points MM-coniques dans le Théorème 4.6 sera presque la même.)

Un mérite de cet espace est d'étendre la condition de la convergence dans  $\mathcal{U}$ . En fait, dans  $\mathcal{U}$  la convergence est celle sur le plan  $\mathbb{C}$ , mais dans  $\mathcal{V}$  un disque  $\mathbb{D}$  est suffisant. De plus, son rayon est changeable, car on prend le quotient par l'action de  $\mathbb{C}^*$ .

**Caractérisation de points MM-coniques.** Enfin, on montre :

**Théorème 4.6 (L'analogie du Théorème 4.2)** *Pour  $z_0 \in J$  les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (MM1)  $z_0$  est MM-conique.
- (MM2) Il existe un élément  $\psi \in \mathcal{V}$  avec  $\psi(0) = z_0$  tel que pour  $\tilde{z} := [\psi] \in \mathcal{G}^{\mathcal{Z}}$ , l'orbite  $\{\tilde{z}, f(\tilde{z}), f^2(\tilde{z}), \dots\}$  ait un point d'adhérence dans  $\mathcal{G}^{\mathcal{Z}}$ .
- (MM3) Pour tout  $\tilde{z} = [\psi] \in \mathcal{G}^{\mathcal{Z}}$  avec  $\psi(0) = z_0$ , l'orbite  $\{\tilde{z}, f(\tilde{z}), f^2(\tilde{z}), \dots\}$  a un point d'adhérence dans  $\mathcal{G}^{\mathcal{Z}}$ .

**Démonstration.** La démonstration est parfaitement analogue à celle du Théorème 4.2. On doit seulement remplacer  $\mathbb{C}$ , le domaine de définition des fonctions, par un disque centré à l'origine. ■

**Remarque.** On peut donner une démonstration du Théorème 4.5 en suivant le même argument que celui du Théorème 4.1 ([LM, Proposition 8.9]) dans le contexte des germes.

## Références

- [Ba] D. Bargmann. Simple proofs of some fundamental properties of the Julia sets. *Ergodic Th. Dynam. Systems.* **19**(1999), 553–558.
- [BS] E. Bedford and J. Smillie. Polynomial diffeomorphisms of  $\mathbb{C}^2$ . VIII. Quasi-expansion. *Amer. J. Math.* **124**(2002), 221–271.
- [BD] F. Berteloot and J. Duval. Une démonstration directe de la densité des cycles répulsifs dans l'ensemble de Julia. *Progress in Mathematics.* **188**(2000), 221–222.
- [BM] F. Berteloot and V. Mayer. *Rudiments de dynamique holomorphe*. Cours Spécialisés, 7. Société Mathématique de France, 2001.
- [CJY] L. Carleson, P.W. Jones, and J.-C. Yoccoz. Julia and John. *Bol. Soc. Bras. Mat.* **25**(1994), 1–30.
- [DH] A. Douady and J. Hubbard. On the dynamics of polynomial-like mappings. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* **18**(1985), 287–344.



- [Du] P.L. Duren. *Univalent Functions*. Springer-Verlag, 1983.
- [Fo] O. Forster. *Lectures on Riemann surfaces*. Springer-Verlag, 1981.
- [Ha] P. Haïssinsky. Rigidity and expansion for rational maps. *J. London Math. Soc.* (2), **63**(2001), 128–140.
- [KL] V.A. Kaimanovich and M. Lyubich. Conformal and harmonic measures on laminations associated with rational maps. *Mem. Am. Math. Soc.* **820**, 2005.
- [Le] G.M. Levin. On non-regular values of the parameter of a family of polynomial maps. *Russ. Math. Surv.* **36**(1981), 189–190.
- [LM] M. Lyubich and Y. Minsky. Laminations in holomorphic dynamics. *J. Diff. Geom.* **49**(1997), 17–94.
- [Mc1] C.T. McMullen. *Renormalization and complex dynamics*. Ann. of Math. Studies **135**, Princeton University Press, 1994.
- [Mc2] C.T. McMullen. The Mandelbrot set is universal. *The Mandelbrot set, theme and variations*. London Math. Soc. Lecture Note Series (No. 274), Cambridge Univ. Press, 2000.
- [Mi] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable. (3rd edition)*. Ann. of Math. Studies **160**, Princeton University Press, 2006.
- [MM] G.J. Martin and V. Mayer. Rigidity in holomorphic dynamics and quasiregular dynamics. *Trans. Amer. Math. Soc.* **355**(2003) No. 11, 4349–4363.
- [Pr] F. Przytycki. Conical limit set and Poincaré exponent for iterations of rational maps. *Trans. Amer. Math. Soc.* **351**(1999) No.5, 2081–2099.
- [RL] J.E. Rivera-Letelier. On the continuity of Hausdorff dimension of Julia sets and similarity between the Mandelbrot set and Julia sets. *Fund. Math.* **170**(2001) 287–317.
- [Sch] N. Schwick. Repelling periodic points in the Julia set. *Bull. London Math. Soc.* **29**(1997), no. 3, 314–316 .
- [Shi] M. Shishikura. The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. *Ann. Math.* **147**(1998), no. 2, 225–267 .
- [Ste] N. Steinmetz. Zalcman functions and rational dynamics. *New Zealand J. Math.* **32**(2003), no. 1, 91–104.
- [Sta] R. Stankewitz. Density of repelling fixed points in the Julia set of a rational or entire semigroup, II. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **32**(2012), no. 7, 2583–2589.
- [TL] Tan L. Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets. *Comm. Math. Phys.* **134**(1990), 587–617
- [vS] S. van Strien. Misiurewicz maps unfold generally (even if they are critically non-finite). *Fund. Math.* **163**(2000) 39–57.
- [Za] L. Zalcman. A heuristic principle in function theory. *Amer. Math. Monthly.* **82**(1975), 813–817.

[Za2] L. Zalcman. Normal families : new perspectives. *Bull. Amer. Math. Soc.*  
**35**(1998), 215–230.