Zalcmanの補題と複素力学系

川平　友規　(名古屋大学大学院多元数理科学研究科)*

概　　要

Zalcman の補題は，複素平面上の領域で定義された正則関数族が正規族と「ならない」ための必要十分条件を与えるものである．本講演では，1 次元複素力学系理論にこの補題を適用し，その効果と新たな応用について概説する．

1. Zalcmanの補題

D を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域とし，$\mathcal{F}$ を D 上で定義された正則関数族とする．Zalcman の補題は，$\mathcal{F}$ がある点の任意の近傍で正規族で**ない**ことの必要十分条件を与える：

□ **補題 1.1 (Zalcmanの補題 [Za])** 関数族 $\mathcal{F}$ が $z_0 \in D$ で正規族をなさないことは，次と同値：ある関数列 $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$，$\rho_k \to 0$ を満たす列 $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^*$，および $z_k \to z_0$ を満たす列 $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset D$ が存在して，関数 $\psi_k(w) = F_k(z_k + \rho_k w)$ が定数でない有理形関数 $\psi : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ に $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束する． □

ここで，実際は $\rho_k > 0$ とできるのだが，後の応用に備えて複素数のままにしておくことにする．また任意の $w \in \mathbb{C}$ について，$k \gg 0$ であれば $z_k + \rho_k w \in D$ とできるので，$\psi_k(w)$ の収束性が意味をもつ．

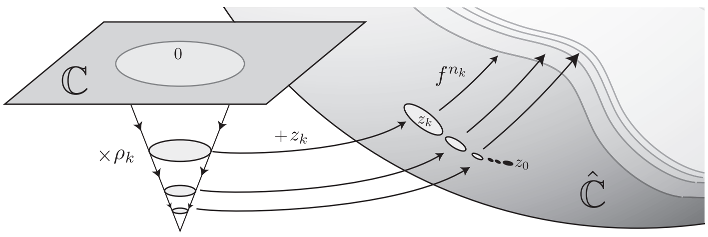

図 1: Zalcman の補題を $\mathcal{F} = \{f^n\}$ （f は有理関数）に適用したイメージ図.

本講演では，この Zalcman の補題を 1 次元複素力学系理論に適用し，従来の Montel の定理を用いた古典的な手法がどのように置き換わるのか，また，Zalcman の補題が生成する有理形関数族の性質について，その応用などをお話させていただく予定である．

参考文献について． Zalcman の補題に関する L. Zalcman 自身による解説は [Za2] を，複素力学系全般の参考文献としては [Mi], [UTM] をあげておく．また，本稿で扱えなかった Zalcman の補題の複素力学系への応用として，[BM]，[Ha]，[Ka]，[MM]，[St] を挙げておく．

本研究は住友財団および科研費 (課題番号:24740103) の助成を受けたものである。
キーワード：複素力学系，有理関数，正規族，Zalcman の補題，Julia 集合，Mandelbrot 集合
* 〒 464-8602 名古屋市千種区不老町　名古屋大学 大学院多元数理科学研究科
e-mail: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp
web: http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira

2. 1次元複素力学系

以下，$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ はRiemann球面に球面距離を入れたものとする．次数2以上の有理関数 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ をひとつ固定するとき，これによって生成される力学系

$$\cdots \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \cdots$$

を**複素力学系** (complex dynamics) と呼ぶことにする．これは正則関数族 $\{f^n\}_{n\geq 0}$ を考えることと同等である．（ただし，f^n は f を n 回合成したもの.）いま $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ を固定したとき，力学系の中でその**軌道** (orbit)

$$z_0 \overset{f}{\longmapsto} z_1 \overset{f}{\longmapsto} z_2 \overset{f}{\longmapsto} z_3 \overset{f}{\longmapsto} \cdots$$

が定まる．力学系の最も素朴な問題意識は,「軌道が（初期値の誤差に対して）安定であるか」ということである．よって「軌道が安定である初期値の集合」として，**Fatou 集合**を

$$\begin{aligned} F(f) &:= \left\{ z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} : \ z_0 \text{ のある近傍 } U \text{ 上で } \{f^n|U\}_{n\geq 0} \text{ は } \underline{\text{同程度連続}} \right\} \\ &= \left\{ z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} : \ z_0 \text{ のある近傍 } U \text{ 上で } \{f^n|U\}_{n\geq 0} \text{ は } \underline{\text{正規族}} \right\} \end{aligned}$$

と定義する．同程度連続性は「 z_0 に生じる誤差を一定以下に抑えれば，その後の z_n の誤差も一様に抑えられる」ことを意味する.「同程度連続」と「正規族」の置き換えは $\widehat{\mathbb{C}}$ のコンパクト性と Ascoli-Arzelà の定理よる．

一方，力学系の不安定部分（いわゆるカオス部分，$F(f)$ の補集合）は

$$J(f) := \left\{ z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} : z_0 \text{ の任意の近傍 } U \text{ 上で } \{f^n|U\}_{n\geq 0} \text{ は } \underline{\text{正規族でない}} \right\}$$

と定義される．これを f の **Julia 集合**と呼ぶ．したがって上述の Zalcman の補題は $\mathcal{F} := \{f^n\}_{n\geq 0}$ に対して Julia 集合上の点を特徴づける必要十分条件となっている.（$J(f)$ が無限遠点 ∞ を含むときは，適当な Möbius 共役をとって考えればよい.）

ここで Julia 集合 $J(f)$ の基本的な性質を列挙しておく：

- $J(f)$ は空でないコンパクト集合.
- $J(f)$ は孤立点をもたない非可算無限集合.
- $f(J(f)) = J(f) = f^{-1}(J(f))$ (完全不変性).
- U が $U \cap J(f) \neq \emptyset$ を満たす開集合 $\implies$ $\exists\, m \in \mathbb{N},\ J(f) \subset \bigcup_{j=1}^{m} f^j(U)$.

3. 「反発周期点はJulia集合内で稠密」

Zalcman の補題が複素力学系に応用された最初の例と思われるのが，Scwhick [Sch] による表題の主張の証明である．

3.1. 反発的周期点

周期点とは，方程式 $f^n(z) = z$ $(n \in \mathbb{N})$ の解のことである．ある周期点 z に対し，$f^n(z) = z$ となる n の最小値 p をその**周期**と呼ぶ．また，そこでの微分係数 $(f^p)'(z)$ を**乗数** (multiplier) と呼ぶことにする．乗数の絶対値が1より大きいとき，その周期点は**反発的周期点** (repelling periodic point) と呼ばれる．z 中心の十分小さな円板は f^p の作用で $|(f^p)'(z)|$ 倍程度に拡大され，自分自身を覆うわけである．このような拡大的な作用のため，関数族 $\{f^n\}$ は z の近傍で正規族となれない．すなわち，$z \in J(f)$ である．

反発的周期点に関しては，次の古典的な定理（1910年代）が知られている：

□ **定理 3.1 (Fatou, Julia)** 反発的周期点全体の集合は $J(f)$ の中で稠密である． □

FatouとJuliaの証明はそれぞれ異なっているが（Milnorの教科書 [Mi] を参照），どちらも有理関数特有の性質を用いており，たとえば整関数や有理形関数による力学系でそのまま通用するような議論ではない．これに対し，Schwick [Sch] が与えたZalcmanの補題を用いる証明は，若干の変更で整関数や有理形関数の力学系にも適用できるものであった．([UTM, 定理2.25] も参照．) また，それをさらに改良した証明が，Bargmann [Ba] およびBerteloot-Duval [BD] により与えられている．講演では，その概要を紹介する予定である．

3.2. パラメータ空間への応用

Schwickのアイディアは関数族のパラメーター空間にも適用できる．後に触れるMandelbrot集合とJulia集合の類似性について調べる際も，ここでのアイディアが重要な役割を果たす.（本講演の以降の内容は [Ka] に基づく.）

複素平面内の単位円板を $\mathbb{D}$ で表し，正則写像 $f : \mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}},\ f : (t, z) \mapsto f_t(z)$ を考えよう．ただし，それぞれの $f_t : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は一定次数 $d \geq 2$ の有理関数である．すなわち，f は $\mathbb{D}$ でパラメトライズされた有理関数の族，ということになる．

アクティブ部分． 以下，ある正則写像 $c : \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$ が存在して，$c(t) = c_t$ が f_t の分岐点となっていると仮定する．ペア (f, c) を考えるとき，分岐点 c_t は f_t の**標識つき分岐点** (marked critical point) と呼ばれる．この c_t が $t = t_0$ において**アクティブ**であるとは，関数族 $\{t \mapsto f_t^n(c_t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が t_0 のすべての近傍で正規族とならないことをいう．アクティブな c_t を与えるパラメーター全体の集合を $A(f, c) \subset \mathbb{D}$ で表し，**アクティブ部分** (activeness locus) と呼ぶ．この集合は，いわゆる分岐部分 (bifurcation locus) の部分集合である．

例． 典型的なのは，2次多項式族 $f : (t, z) \mapsto z^2 + 3t,\ c_t = 0$ の場合である．このとき，$A(f, 0)$ は後述するマンデルブロー集合 $\mathbb{M}$ の「境界部分」に相当する．

Schwickの議論をうまく適用すると，たとえば次の定理が証明できる：

□ **定理 3.2 (前反発的な分岐点の分布)** $A(f, c)$ は空でないとする．このとき，任意の $t_0 \in A(f, c)$ に対し，$A(f, c)$ 内の収束列 $t_k \to t_0$ で各 c_{t_k} の f_{t_k} による軌道はある時点から反発的周期点となるものが存在する． □

講演では（時間の許す範囲で）Montelの定理を用いた古典的な証明と，Shcwickの議論をもちいた証明を比較してみたいと思う．

4. Zalcman 関数と Lyubich-Minsky ラミネーション

4.1. Zalcman 関数

$f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ を次数2以上の有理関数とし，写像族 $\mathcal{F} := \{f^n\}$ に Zalcman の補題を適用する．Julia 集合 $J = J(f)$ の元 $z_0 \neq \infty$ に対し，Zalcman の補題のようにして得られる極限関数 ψ を f の z_0 における**Zalcman 関数**と呼ぶ（Steinmetz [St]）．またその全体を $\mathcal{Z}(z_0) = \mathcal{Z}_f(z_0)$ で表す．もし J が無限遠点を含むときは，$\mathcal{Z}(\infty) := \{1/\phi : \phi \in \mathcal{Z}_F(0)\}$ と定義する．ただし，F は $F(z) = 1/f(1/z)$ として得られる有理関数である．さらに f の Zalcman 関数の全体 $\mathcal{Z}$ を

$$\mathcal{Z} \ := \ \bigcup_{z_0 \in J} \mathcal{Z}(z_0)$$

と定義する．

さて $\mathbb{C}$ 全体で定義された定数でない有理形関数全体の集合を $\mathcal{U}$ と表す．また，複素アファイン写像全体を Aff で表す．このとき有理関数 f について $f \circ \mathcal{U} \subset \mathcal{U}$，かつ $\mathcal{U} \circ \mathrm{Aff} \ = \ \mathcal{U}$ が成り立つことは容易にわかるが，$\mathcal{U}$ の部分集合である Zalcman 関数族 $\mathcal{Z}(z_0)$ および $\mathcal{Z}$ は，さらによい「不変性」をもつのである：

□ **命題 4.1 (Z 関数族の不変性)** 任意の $z_0 \in J$ に対し，関数族 $\mathcal{Z}(z_0)$ は

$$f \circ \mathcal{Z}(z_0) \ = \ \mathcal{Z}(z_0) \ = \ \mathcal{Z}(z_0) \circ \mathrm{Aff}$$

を満たす．すなわち，

(1) $\psi \in \mathcal{Z}(z_0)$ ならば，$f \circ \psi \in \mathcal{Z}(z_0)$．また，ある $\psi_1 \in \mathcal{Z}(z_0)$ が存在して，$\psi = f \circ \psi_1$．

(2) $\delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を複素アファイン写像とする．このとき，$\psi \in \mathcal{Z}(z_0)$ ならば $\psi \circ \delta \in \mathcal{Z}(z_0)$．

したがって次も成り立つ：$f \circ \mathcal{Z} \ = \ \mathcal{Z} \ = \ \mathcal{Z} \circ \mathrm{Aff}$. □

4.2. Zalcman 関数の応用：Lyubich-Minsky ラミネーションの構成

複素力学系を研究するうえでのひとつの指針として，**Sullivan の辞書**というものがある．80 年代，D. Sullivan が提唱したこの「辞書」は，古典的な正則力学系のひとつである Klein 群論と複素力学系との類似性に着目し，方法論を共有すべし，というひとつのドグマを掲げたものである.（その成功は，たとえば [UTM] に詳しい.）

ここで Klein 群 Γ とは，リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ に Möbius 変換群として作用する $PSL(2, \mathbb{C})$ の離散部分群のことである．一方，$PSL(2, \mathbb{C})$ は 3 次元双曲空間 $\mathbb{H}^3$ に等長変換群として作用するため，商空間 $\mathbb{H}^3/\Gamma$ は 3 次元双曲的多様体（一般には軌道体）となる．すなわち，Klein 群論とは 3 次元双曲多様体論に他ならない.

一方，複素力学系の作用は $\mathbb{H}^3$ への性質のよい拡張ができないことが知られており，その意味で Klein 群のような「双曲幾何的実現」として自明なものをもたない．そこで 90 年代に登場したのが，M. Lyuibich と Y. Minsky によるラミネーション理論 [LM] である．彼らは複素力学系に対し,「双曲幾何的実現」として**3 次元双曲ラミネーション**が取れることを主張し，さらにその幾何学的剛性から半双曲と呼ばれるクラスの有理関数の力学系に関する剛性定理を証明した.

この3次元双曲ラミネーションに用いられるのは，有理関数 f から生成される，ある有理形関数の族 $\mathcal{LM} \subset \mathcal{U}$ である．この関数族は「不変性」

$$f \circ \mathcal{LM} \;=\; \mathcal{LM} \;=\; \mathcal{LM} \circ \mathrm{Aff}$$

をみたしており，この性質からまず，リーマン面ラミネーション $\mathcal{A}^{\mathcal{LM}}$ が構成される．この $\mathcal{A}^{\mathcal{LM}}$ の「スケーリング束」をとり，さらに力学系の自然な作用により商空間をとったものがLyubich-Minskyの3次元双曲ラミネーションである．(詳しくは [LM] を参照.)

さてZalcman関数の全体 $\mathcal{Z}$ も「不変性」

$$f \circ \mathcal{Z} \;=\; \mathcal{Z} \;=\; \mathcal{Z} \circ \mathrm{Aff}$$

を満たすことから，同様のレシピによりリーマン面ラミネーション $\mathcal{A}^{\mathcal{Z}}$ が構成できることがわかる．実はかなり広いクラスの有理関数について，$\mathcal{LM} = \mathcal{Z}$ が成り立ち，リーマン面ラミネーション $\mathcal{A}^{\mathcal{LM}}$ と $\mathcal{A}^{\mathcal{Z}}$ は一致するのである：

□ **定理 4.2 (ラミネーションの一致, [Ka])** f は次を満たすとする：

(∗) 任意の $z_0 \in J(f)$ に対し，$z_0' \in UGO(z_0) - \{z_0\}$ かつ $z_0 \notin P(f)$ となるものが存在する.

このとき $\mathcal{Z}$ と $\mathcal{LM}$ は一致する: とくに，$\mathcal{A}^{\mathcal{LM}}$ と $\mathcal{A}^{\mathcal{Z}}$ も一致する □

ただし，条件 (∗) 内の $UGO(z_0)$, $P(f)$ は次のように定義する：まず $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対し，**全軌道** (grand orbit) $GO(z_0)$ とは，ある $m, n \in \mathbb{N}$ が存在して $f^m(z_0) = f^n(\zeta)$ とできるような $\zeta \in \widehat{\mathbb{C}}$ の全体である．その中でも，$(f^m)'(z_0) \neq 0$ かつ $(f^n)'(\zeta) \neq 0$ とできるような ζ 全体が$UGO(z_0)$ である．また $P(f)$ はいわゆる f の**分岐後集合** (post-critical set)であり，

$$P(f) \;:=\; \overline{\{f^n(c) \,:\, n \in \mathbb{N}, f'(c) = 0\}}$$

と定義する．

たとえば，双曲的な有理関数は (∗) を満たす．もうすこし一般に，放物的な（i.e. J が分岐点をもたない）有理関数であれば良い．さらに，f が無限回くりこみ可能な2次多項式であっても (∗) を満たす．一方，(∗) が成り立たない例として $f(z) = z^2 - 2$ における $z_0 = 2$ などがある．$J = P$ となる場合も成り立たない．

5. パラメーター空間におけるZalcman関数

§3では，標識つき分岐点 $c : \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$ をもつ有理関数族 $f : \mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ を考えた．そのアクティブ部分は関数族 $\{t \mapsto f_t^n(c_t)\}_{n \geq 0}$ が正規でないパラメーター $t \in \mathbb{D}$ の全体と定義したから，Zalcmanの補題が適用でき，かつそれに対応する有理形関数族を考えることができる．また，パラメーター自体は $\mathbb{D}$ でなく $\mathbb{C}$ で考えてもよい．

以下では話を単純にするために，2次関数族

$$\left\{f_c(z) = z^2 + c \,:\, c \in \mathbb{C}\right\}$$

について考えよう．各 $f_c : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ （ただし $f_c(\infty) = \infty$ ）は原点と無限遠点を分岐点にもつが，無限遠点はc によらず安定な固定点であるから，原点 $z = 0$ を標識つき分岐点としてアクティブ部分を考えることができる．

じつは c を固定して分岐点の軌道 $\{f_c^n(0)\}_{n \geq 0}$ を考えるとき，

(a) すべての $n \geq 0$ について $|f_c^n(0)| \leq 2$.

(b) $f_c^n(0) \to \infty$ $(n \to \infty)$.

のいずれかであることが（三角不等式だけの簡単な計算で）わかる．分岐点軌道が (a) のタイプとなるような $c \in \mathbb{C}$ 全体を **Mandelbrot 集合** とよび，$\mathbb{M}$ で表す．すなわち，

$$\mathbb{M} \ := \ \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \leq 2 \ (\forall n \in \mathbb{N})\}.$$

原点を標識付き分岐点とみなすと，この関数族のアクティブ部分は $\partial\mathbb{M}$ となることがわかる．すなわち，$F_n(c) := f_c^n(0)$ $(n \geq 0)$ とおくとき，

$$\partial\mathbb{M} \ = \ \Big\{ c_0 \in \mathbb{C} \ : \ c_0 \text{ の任意の近傍 } U \text{ 上で } \{F_n|U\}_{n\geq 0} \text{ は} \underline{\text{正規族でない}} \Big\}$$

ここで $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ のとき Zalcman の補題を適用すれば，$n_k \to \infty$，$\rho_k \to 0$, $c_k \to c_0$ が存在して，

$$F_{n_k}(c_k + \rho_k w) \to \Phi(w)$$

となる $\Phi \in \mathcal{U}$ が存在する．この形の Φ を c_0 における**パラメトリック Zalcman 関数**（もしくは para-Zalcman 関数）とよび，その全体を $\mathcal{C}(c_0)$ で表す．さらに

$$\mathcal{C} := \bigcup_{c_0 \in \partial\mathbb{M}} \mathcal{C}(c_0)$$

とおく．パラメトリック Zalcman 関数族は，次の意味で「不変性」をもつ：

□ **命題 5.1 (パラメトリック Z 関数の不変性)** 任意の $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ に対し，関数族 $\mathcal{C}(c_0) \subset \mathcal{U}$ は

$$f_{c_0} \circ \mathcal{C}(c_0) \ = \ \mathcal{C}(c_0) \ = \ \mathcal{C}(c_0) \circ \mathrm{Aff}$$

を満たす．とくに，$\mathcal{C} := \bigcup_{c_0 \in \partial\mathbb{M}} \mathcal{C}(c_0)$ は $\mathcal{C} \ = \ \mathcal{C} \circ \mathrm{Aff}$ を満たす． □

$\mathcal{Z}$ と $\mathcal{C}$ の「交差」． パラメーター $c \in \mathbb{C}$ に対し，f_c が生成する $z \in J(f_c)$ における Zalcman 関数を $\mathcal{Z}_c(z)$，Zalcman 関数の全体を $\mathcal{Z}_c$ と表すことにする．このとき，次が成り立つ：

□ **定理 5.2** $\partial\mathbb{M}$ の稠密な部分集合 SH が存在して，$c \in SH$ のとき $\mathcal{Z}_c \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. より正確には，次が成り立つ：

$$c \in SH \implies c \in J(f_c) \quad \text{かつ} \quad \mathcal{Z}_c(c) \cap \mathcal{C}(c) \neq \emptyset.$$

□

じつは $\mathrm{H.dim}(SH) = 2$ （ハウスドルフ次元）が成り立つ．この SH が何かは，7 節で明らかにしよう．

6. Poincaré関数とその一般化

ここでも話を2次関数族 $\{f_c(z) = z^2 + c : c \in \mathbb{C}\}$ に限るが，一般の有理関数族にもそのまま通用する議論である．

Zalcman関数のなかでも古典的によく知られた例として，次のものがある：

□ **定理 6.1 (Poincaré関数, Kœnigs)** a_0 を $f = f_c$ $(c \in \mathbb{C})$ の周期 p の反発的周期点とし，その乗数を $\lambda := (f^p)'(a_0)$ とする．このとき，関数列

$$w \quad \longmapsto \quad f^{kp}\left(a_0 + \frac{w}{\lambda^k}\right) \qquad (k \in \mathbb{N})$$

はある有理形関数 $\psi \in \mathcal{U}$ に $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束し，

$$f^p \circ \psi(w) \;=\; \psi(\lambda w), \quad \psi(0) = a_0, \quad \psi'(0) = 1$$

を満たす．とくに，$\psi \in \mathcal{Z}(a_0)$． □

等式 $f^p \circ \psi(w) = \psi(\lambda w)$ は，$\mathbb{C}$ 上の力学系 $w \mapsto \lambda w$ を $\psi : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ という「レンズ」を通して眺めることで，f^p による $\widehat{\mathbb{C}}$ の力学系（ただし ψ の除外値は除く）が得られることを意味する．このような ψ は**Poincaré関数**と呼ばれる．

これを一般化してみよう．

定義（双曲的集合）． コンパクト集合 $X \subset \mathbb{C}$ が $f = f_c$ の**双曲的集合** (hyperbolic set) であるとは，$f(X) \subset X$ かつある $\kappa, \eta > 0$ が存在して任意の $x \in X$ に対し $|(f^n)'(x)| \geq \kappa(1+\eta)^n$ が成り立つときをいう．

定義より，$X \subset J(f)$ でなくてはならない．典型的な例は上のような反発的周期点 $X = \{a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}\}$（ただし $f(a_i) = a_{i+1}, a_0 = a_p$）である．このとき，$1+\eta = |\lambda|^{1/p}$ とし，$\kappa > 0$ をうまく選べば双曲的集合の定義を満たすことがわかる．

ちなみに $J(f)$ 自体が双曲的集合になるとき，f は双曲的と呼ばれる．

□ **定理 6.2 (一般化Poincaré関数の存在, [Ka])** X を $f = f_c$ の双曲的集合とし，$a_0 \in X$ を任意にとる．さらに $m \in \mathbb{N}$ に対し $a_m := f^m(a_0)$，$\lambda_m := (f^m)(a_0)$，$T_m(w) := a_0 + w/\lambda_m$ とおく．

このとき，数列 $\{m(k)\}_{k \geq 0} \subset \mathbb{N}$ が存在して，関数列

$$w \quad \longmapsto \quad f^{m(k)}\left(a_0 + \frac{w}{\lambda_{m(k)}}\right) \qquad (k \in \mathbb{N})$$

はある有理形関数 $\psi \in \mathcal{U}$ に $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束し，$\psi(0) \in X$，$\psi'(0) = 1$ を満たす．とくに，$\psi \in \mathcal{Z}(a_0)$． □

この定理の証明においては，Kœnigsの古典的な議論（周期点であることをフル活用する）が一切使えないため，別の方法（単葉関数論と正規族をもちいる）が必要となる．ちなみに $a_0 \in X$ が双曲的であることは本質的ではなく，$\limsup |\lambda_m| = \infty$ であれば上の定理は成り立つ．

安定性． 双曲的集合については，次の「力学系的安定性」が知られている：

□ **命題 6.3 (双曲的集合の力学系的安定性**, [Shi]) X_0 を f_{c_0} の双曲的集合とする．このとき，ある c_0 の近傍 $U \subset \mathbb{C}$ が存在して，次の「力学系的正則運動」が存在する：すなわちある写像 $\chi : X_0 \times U \to \mathbb{C}$: が存在し，

- 任意の $x \in X_0$ に対し, $\chi(x, c_0) = x$;
- 任意の $x \in X_0$ を固定したとき，写像 $\chi^x : c \mapsto \chi(x, c)$ は正則.
- 任意の $c \in U$ を固定したとき，写像 $\chi_c : x \mapsto \chi(x, c)$ は「擬等角写像」であり，X_0 上 $f_c \circ \chi_c = \chi_c \circ f_{c_0}$ を満たす. □

上で言う「擬等角写像」とは，ある $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への擬等角写像を X_0 に制限したものと考えてよい（拡張 λ 補題）.

この U が十分小さければ，$X_c := \chi_c(X_0)$ も（c に関して）一様な拡大性をもつ双曲的集合であることがわかる．このことから，定理 6.2 で得られる一般化された Poincaré 関数は c に対し正則に依存することがわかる:

□ **命題 6.4 (パラメーターに関する正則依存性)** $\psi_{c_0}(w) = f_{c_0}^{m(k)}\left(a_0 + \frac{w}{\lambda_{m(k)}}\right)$ を 定理 6.2 の一般化 Poincaré 関数とする．さらに $a_0(c) := \chi_c(a_0)$, $\lambda_{m(k)}(c) := f_c^{m(k)}(a_0(c))$ ($c \in U$) とおくとき，$f_c^{m(k)}\left(a_0(c) + \frac{w}{\lambda_{m(k)}(c)}\right)$ も同様の一般化 Poincaré 関数 $\psi_c \in \mathcal{Z}_c(a_0(c))$ に収束する．また，任意の $w \in \mathbb{C}$ に対し，$U \ni c \mapsto \psi_c(w)$ は正則.

7. 半双曲的パラメーター，横断性，$\mathbb{M}$ と J の類似性

以上の結果を用いて，Tan Lei, Rivera-Letelier による Julia 集合と Mandelbrot 集合の類似性に関する結果を（若干の一般化とともに）Zalcman 関数の言葉で表現することができる.

Mandelbrot 集合と半双曲的パラメーター． 集合 $\mathbb{M}$ の定義を思い出しておこう：

$$\mathbb{M} \ := \ \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \le 2 \ (\forall n \in \mathbb{N})\}.$$

もし $c \in \mathbb{M}$ であれば，f_c の Julia 集合は次のように特徴づけることができる：

$$\begin{aligned} K(f_c) \ &:= \ \{z \in \mathbb{C} : |f_c^n(z)| \le 2 \ (\forall n \in \mathbb{N})\} \\ J(f_c) \ &= \ \partial K(f_c). \end{aligned}$$

定義（半双曲的パラメーター）． $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ が**半双曲的** (semi-hyperbolic) であるとは，f_{c_0} の力学系において，分岐点 $z = 0$ が再帰的でないことをいう．すなわち，分岐点 $z = 0$ の軌道の集積点全体 X_0 が $z = 0$ 自身を含まないことをいう.（$z = 0$ が周期点となる場合は $c \in \mathbb{M}^\circ$ なので除外されている.）また，$\partial\mathbb{M}$ 内の半双曲的パラメーター全体の集合を SH で表す.

ここで $f_{c_0}(0) = c_0$ （分岐値）であるから，X_0 はパラメーターと同じ $z = c_0$ 自身の軌道の集積点全体に他ならない．半双曲的パラメーターは次の性質を満たす.

□ **命題 7.1** $c_0 \in SH$ のとき,

1. X_0 は f_{c_0} の双曲的集合である（[CJY]）．

2. ある $l \in \mathbb{N}$ が存在して，$f^l_{c_0}(c_0) \in X_0$.

3. $c_0 \in J(f_{c_0})$ かつ $J(f_{c_0}) = K(f_{c_0})$. とくに，K_{c_0} は内点をもたない． □

例（Misiurewicz 点）． 次の性質を持つ $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ は **Misiurewicz 点**と呼ばれる：「ある $l, p \in \mathbb{N}$ が存在して，$a_0 = f^l_{c_0}(c_0)$ は周期 p の反発的期点」．これは SH の元の典型例である．とくに，定理 3.2 より，

□ **命題 7.2** *Misiurewicz*点は $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ 内で稠密．したがって SH も $\partial\mathbb{M}$ 内で稠密． □

ちなみに Misiurewicz 点は定義より可算集合であるが，SH は下で述べるように非可算となる．

横断性（Transversality）． いま $c_0 \in SH$, その集積点全体からなる双曲的集合を X_0，$a_0 := f^l_{c_0}(c_0) \in X_0$ とする（命題 7.1）．このとき，c_0 の十分小さな近傍 U が存在して，正則運動 $\chi : X_0 \times U \to \mathbb{C}$ が存在するのであった（命題 6.3）よって正則関数 $a(c) := \chi_c(a_0) \in \chi_c(X_0)$ が U 上存在する．

さて $b(c) := f^l_c(c)$ とおくと，これは c について正則であり，$b(c_0) = a(c_0)$ を満たす．このとき，次が知られている：

□ **命題 7.3 (横断性，[RL, vS])** 正則関数 $b(c)$ と $a(c)$ は c_0 で接しない．すなわち，ある $B_0 \neq 0$ が存在して，$c \to c_0$ のとき $b(c) - a(c) = B_0(c - c_0) + o(c - c_0)$. □

参考（Hausdorff 次元について）． 双曲的パラメーターに関しては，宍倉氏による次の重要な結果 [Shi] がある：任意の $\epsilon > 0$ に対しある $c_0 \in SH$ と $r > 0$ が存在して，

$$\begin{aligned}\mathrm{H.dim}(\partial\mathbb{M}) &\geq \mathrm{H.dim}(\{c \in SH \,:\, b(c) \in \chi_c(X_0)\}) \\ &\geq \mathrm{H.dim}(X_0 \cap \mathbb{D}(r, c_0)) - \epsilon/2 > 2 - \epsilon.\end{aligned}$$

すなわち $\mathrm{H.dim}(\partial\mathbb{M}) = \mathrm{H.dim}(SH) = 2$.

$\mathcal{Z}$ と $\mathcal{C}$ の「交差」（再）． さて以上の結果を合わせることで，次の定理を得る．これは 5 節で述べた定理 5.2 の詳細版である：

□ **定理 7.4 ([Ka])** $c_0 \in SH$ とするとき，

(1) 数列 $n_k \to \infty$ と $\rho_k \to 0$ $(k \to \infty)$ が存在して，関数列

$$\phi_k(w) \;=\; f^{n_k}_{c_0}(c_0 + \rho_k w)$$

はある *Zalcman*関数 $\phi \in \mathcal{Z}_{c_0}(c_0)$ に収束する．

(2) ある定数 $Q \neq 0$ が存在して，関数列

$$\Phi_k(w) \;:=\; f^{n_k}_{c_0 + Q\rho_k w}(c_0 + Q\rho_k w)$$

も上と同じ関数 ϕ に収束する．とくに，$\phi \in \mathcal{C}(c_0)$. □

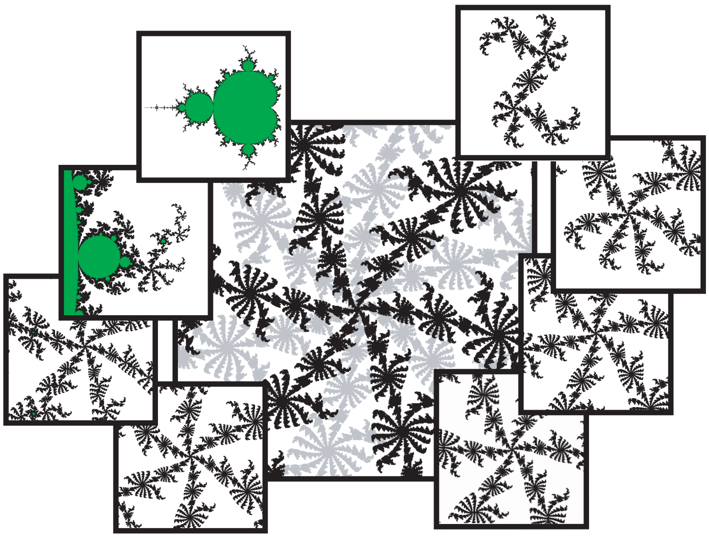

図 2: 中央の絵は，ある Misiurewicz 点 c_0 の周りでマンデルブロー集合（グレー）と Julia 集合 J_{c_0}（黒）を同じ座標系で描いたもの．それぞれの描画領域を広げていくと，一方は Mandelbrot 集合（左 4 枚）に，一方は Julia 集合（右 4 枚）になる．

証明には横断性が重要な役割を果たす．

Mandelbrot 集合と Julia 集合の類似性． 最後に $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ における $\mathbb{M}$ と $J(f_{c_0})$ の類似性について述べる．

Hausdorff 収束． まず，集合が「似ている」ことを厳密に表現するための設定を行おう．$\mathbb{C}$ 上の（空でない）コンパクト集合全体を $\mathrm{Comp}^*(\mathbb{C})$ で表す．そこでの列 $\{K_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Comp}^*(\mathbb{C})$ について，K_k が $k \to \infty$ のとき $K \in \mathrm{Comp}^*(\mathbb{C})$ に **Hausdorff 収束する**とは，任意の $\epsilon > 0$ に対しある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$k \geq k_0$ のとき $K \subset \mathrm{N}_\epsilon(K_k)$ かつ $K_k \subset \mathrm{N}_\epsilon(K)$ が成り立つこととする．ただし，$\mathrm{N}_\epsilon(\cdot)$ は $\mathbb{C}$ 内での ϵ-開近傍である．

さて原点中心半径 $r > 0$ の開円板を $\mathbb{D}_r$ で表そう．閉集合 $K \subset \mathbb{C}$ に対し，記号 $[K]_r$ で集合 $(K \cap \mathbb{D}_r) \cup \partial\mathbb{D}_r \in \mathrm{Comp}^*(\mathbb{C})$ を表すことにする．また，$a \in \mathbb{C}^*$ および $b \in \mathbb{C}$ に対し，記号 $a(K - b)$ で集合 $\{a(z - b) : z \in K\} \in \mathrm{Comp}^*(\mathbb{C})$ を表すことにする．

以上で，定理を述べる準備が整った：

□ **定理 7.5** ($\mathbb{M}$ **と** J **の類似性, Cf. [TL], [RL], [Ka]**) ある $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ が $c_0 \in J = J(f_{c_0})$ を満たすとする．また，数列 $n_k \to \infty$, $\rho_k \to 0$, $c_k \to c_0$ $(k \to \infty)$，定数 $Q \neq 0$ が存在し，ふたつの関数列

$$\phi_k(w) = f_{c_0}^{n_k}(c_k + \rho_k w), \qquad \Phi_k(w) = f_{c_k + Q\rho_k w}^{n_k}(c_k + Q\rho_k w)$$

が同一の定数でない関数 $\phi \in \mathcal{U}$ にコンパクト一様収束するとする．いま $\mathcal{J} := \phi^{-1}(J) \subset \mathbb{C}$ とするとき，任意に大きな $r > 0$ について次が Hausdorff 収束の意味で成り立つ：

(a) $\left[\rho_k^{-1}(J - c_k)\right]_r \to [\mathcal{J}]_r \quad (k \to \infty)$

(b) $\left[Q^{-1}\rho_k^{-1}(\mathbb{M} - c_k)\right]_r \to [\mathcal{J}]_r \quad (k \to \infty)$

とくに $c_0 \in SH$ の場合，$c_k \equiv c_0$ について上が成り立つ． □

ちなみに，いわゆる「放物的パラメーター」は $c_0 \in J(f_{c_0})$ という条件によって除外されている．関数列 ϕ_k, Φ_k の収束条件を弱めて，たとえば「$\mathbb{D}$ 上の正則関数全体の空間」での収束に置き換えても同様の結果が得られる．この場合は $0 < r < 1$ である．

参考文献

[Ba] D. Bargmann. Simple proofs of some fundamental properties of the Julia sets. *Ergodic Th. Dynam. Systems.* **19**(1999), 553–558.

[BD] F. Berteloot and J. Duval. Une démonstration directe de la densité des cycles répulsifs dans l'ensemble de Julia. *Progress in Mathematics.* **188**(2000), 221–222.

[BM] F. Berteloot and V.Mayer. *Rudiments de dynamique holomorphe.* Cours Spécialisés, 7. Société Mathématique de France, 2001.

[CJY] L. Carleson, P.W. Jones, and J.-C. Yoccoz. Julia and John. *Bol. Soc. Bras. Mat.* **25**(1994), 1–30.

[Ha] P. Haïssinsky. Rigidity and expansion for rational maps. *J. London Math. Soc.* (2), **63**(2001), 128 – 140.

[Ka] T. Kawahira. Quatre applications du lemme de Zalcman à la dynamique complexe. *Preprint.* （著者の web page にあります.）

[Ka2] T. Kawahira. Similarity between the Mandelbrot set and the Julia sets: a simplified proof. *Preprint*.（著者の web page にあります．タイトル変更の可能性あり.）

[LM] M. Lyubich and Y. Minsky. Laminations in holomorphic dynamics. *J. Diff. Geom.* **49**(1997), 17 – 94.

[Mc1] C.T. McMullen. *Renormalization and complex dynamics.* Ann. of Math. Studies **135**, Princeton University Press, 1994.

[Mc2] C.T. McMullen. The Mandelbrot set is universal. *The Mandelbrot set, theme and variations.* London Math. Soc. Lecture Note Series (No. 274), Cambridge Univ. Press, 2000.

[Mi] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable. (3rd edition).* Ann. of Math. Studies **160**, Princeton University Press, 2006.

[MM] G.J. Martin and V. Mayer. Rigidity in holomorphic dynamics and quasiregular dynamics. *Trans. Amer. Math. Soc.* **355**(2003) No. 11, 4349 – 4363.

[RL] J.E. Rivera-Letelier. On the continuity of Hausdorff dimension of Julia sets and similarity between the Mandelbrot set and Julia sets. *Fund. Math.* **170**(2001) 287 – 317.

[Sch] N. Schwick. Repelling periodic points in the Julia set. *Bull. London Math. Soc.* **29**(1997), no. 3, 314–316 .

[Shi] M. Shishikura. The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. *Ann. Math.* **147**(1998), no. 2, 225–267 .

[St] N. Steinmetz. Zalcman functions and rational dynamics. *New Zealand J. Math.* **32**(2003), no. 1, 91–104.

[TL] Tan L. Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets. *Comm. Math. Phys.* **134**(1990), 587 – 617

[UTM] 上田 哲生・谷口 雅彦・諸澤 俊介．複素力学系序説．培風館，1995.

[vS] S. van Strien. Misiurewicz maps unfold generally (even if they are critically non-finite) *Fund. Math.* **163**(2000) 39 – 57.

[Za] L. Zalcman. A heuristic principle in function theory. *Amer. Math. Monthly.* **82**(1975), 813 – 817.

[Za2] L. Zalcman. Normal families: new perspectives. *Bull. Amer. Math. Soc.* **35**(1998), 215 – 230.