第 6 章　余接空間

このノートでは余接空間を，接空間のペアとして，早い段階で登場させることにした．余接空間を接空間の双対空間として定式化することは他の教科書と変わりないが，接空間の導入がより自然に行われている分，明解なイメージを保ちながら余接空間を理解できると思う．

6.1　測り，測られる関係

まず，1 章（線形代数の基礎のキソ）では，与えられたベクトル空間 V 上の「線形汎関数」全体の空間として「双対空間」V^* を定義した (1.6.6 を参照．)．

「線形汎関数」とは，与えられたベクトルを「測定」し，なんらかの実数を返す「ベクトル測定器」であり，しかも V から $\mathbb{R}$ への線形写像になっているものをいう．たとえば,「ベクトルの和」 の測定値は各ベクトルの「測定値の和」になっている．したがって,「双対空間」とは「線形なベクトル測定器」の全体だといえる．

逆にひとつのベクトル $v \in V$ を固定したとき，双対空間 V^* の元 f，すなわち「線形ベクトル測定器」 f による v の測定値を考えると，それは「v によって f の機能を測定した値」だとも考えられる．したがって v は「『ベクトル測定器』測定器」としても機能する．

なんだか話がややこしくなってきたが，このように V と V^* の元は互いに測り，測られる関係にある．

以下の余接空間の定義では，5 章の後半で扱った「方向微分」を介して（曲線の）速度ベクトルと（関数の）勾配ベクトルが互いに測り・測られる関係にあることを見る．すなわち「余接空間」とは,「勾配ベクトル」からなるベクトル空間なのである．

6.2　速度ベクトル vs. 勾配ベクトル

1. 与えられた関数 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ について，その「$\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ における速度ベクトル測定器」としての本質を見極めよう．

   ある速度ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ を固定して，これを F で「測定」してみよう．全微分を変形した式（前節の最後の式）に $\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}h$ を代入した式

   $$F(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{v}h) - F(\boldsymbol{p}) \;=\; \mathrm{grad}\,(F,\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{v}h + o(h)$$

   を見てみよう．この式から，$h \to 0$ としたとき

   $$\frac{F(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{v}h) - F(\boldsymbol{p})}{h}$$

   という量が

   $$\mathrm{grad}\,(F,\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{v} \;=\; \left\langle {}^t\mathrm{grad}\,(F,\boldsymbol{p}), \boldsymbol{v} \right\rangle$$

という横ベクトルと縦ベクトルの積（もしくは右辺の内積）によって定まる，ということを言っている．これが，前章でみた（速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ に関する）**方向微分** $D_{\boldsymbol{v}}F(\boldsymbol{p})$ と呼ばれる量である．この量は先ほどの風船の例でいうところの K/h に対応する．じっさい，K はそのイミを考えれば h が小さくなればなるほど小さい値を取るはずで，K/h という比は方向微分に対応する「無限小／無限小」を近似したものだったのである．

したがって「$\boldsymbol{v}$ の F による測定値」としては，上の内積で定まる方向微分の値こそが，近似値でない「理論値」と考えてよいであろう．結局のところ，関数 F の「速度ベクトル測定器」としての性質は，その勾配ベクトル

$$\mathrm{grad}\,(F, \boldsymbol{p}) \in \mathbb{R}_n$$

に集約されていることがわかった．

2. ここで注目すべきことは，$\mathrm{grad}\,(F, \boldsymbol{p})$ も速度ベクトルと同じく $\boldsymbol{p}$ を始点とする n 次元のベクトルだということである．唯一の違いは横ベクトルで表現されている点であるが，これは人間が（いや，わたしとあなたが）決めた便宜的な約束である．

3. じっさい，$\mathrm{grad}\,(F, \boldsymbol{p})$ は

$$\mathrm{grad}\,(F, \boldsymbol{p}) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}) & \dfrac{\partial F}{\partial x_2}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \dfrac{\partial F}{\partial x_n}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}$$

書き下すことができるが，これら $a_i := \dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})$ は F と $\boldsymbol{p}$ から決まる定数であって，

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書くことで縦ベクトルと表現することだってできる．このように「実数が縦に並んだもの」という意味のレベルにおいては，速度ベクトルとなんら区別できないものである．

4. **線形汎関数としての勾配ベクトル．** この節をしめくくるにあたって，勾配ベクトルが速度ベクトルたちにとって線形汎関数（『線形代数の基礎のキソ』参照）になっていることを確認しておこう．

5. ここで改めて，$\mathbb{R}^n$ の（位置）ベクトル $\boldsymbol{p}$ を始点とするベクトル全体を $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ と表し，$\boldsymbol{p}$ における速度ベクトルの空間と呼ぶことにする．これは $\mathbb{R}^n$ 自身のコピーが $\boldsymbol{p}$ を中心におかれているとイメージすればよいだろう．もっと具現化して，OHP シートの上に OHP シートが重ねておかれているところを想像してもよいだろう．

6. さてある関数 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を定めると，その $\boldsymbol{p}$ における勾配ベクトル $\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\,(F, \boldsymbol{p}) \in \mathbb{R}_n$ が定まる．いま，関数 $(DF)_{\boldsymbol{p}} : \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$(DF)_{\boldsymbol{p}} : \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{a}\boldsymbol{v} \;=\; \left\langle {}^t\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \right\rangle$$

によって定めよう．これは「F の $\boldsymbol{p}$ における $\boldsymbol{v}$ に関する方向微分」と同じ量であるが，この解釈は記憶の片隅にとどめておくだけにして，いまは縦横ベクトルの積，もしくは内積としての定義に意識を集中させよう．

このとき，任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ について，

$$(DF)_{\boldsymbol{p}}(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) \;=\; \alpha(DF)_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{u}) + \beta(DF)_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{v})$$

が定まることは $\mathbb{R}^n$ 内における標準内積の定義から明らかであろう．したがって $(DF)_{\boldsymbol{p}}$ は $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数である．

いま写像 $(DF)_{\boldsymbol{p}}$ 自体はひとつの勾配ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_n$ のみで決定されるから，この意味で $(DF)_{\boldsymbol{p}}$ と $\boldsymbol{a}$ は同一視してもかまわない．これは，勾配ベクトル $\boldsymbol{a}$ が速度ベクトルにとって線形汎関数としての役割をもつ，ということである．

7. 以上のことから，$\mathbb{R}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の線形汎関数の空間すなわち双対空間であることと全く同じ理由で「$\boldsymbol{p}$ における勾配ベクトルの全体空間」は「$\boldsymbol{p}$ における速度ベクトル全体の空間」$\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ の双対空間であることがわかる．これを $\mathrm{T}^*_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ と表そう．

8. 最後に，速度ベクトルと勾配ベクトルの性質をまとめておく：

	速度ベクトル	勾配ベクトル
意味	ある点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ を通過する物体の「勢いと方向」を表現	ある点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ における関数の「変化の様子」を表現
表示	n 次元数ベクトル（縦）	n 次元数ベクトル（横）
全体	n 次元ベクトル空間 $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$	n 次元ベクトル空間 $\mathrm{T}^*_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$
機能	関数の変化を測定（方向微分）	速度ベクトルを測定（方向微分）

6.3 多様体における関数の勾配ベクトル

1. さて多様体の，余接空間の定義である．すでに予想しておられるかもしれないが，これから余接空間を「多様体上のある点における，関数の勾配ベクトルの空間」として定式化する．接空間は「多様体上のある点を通過する物体の，速度ベクトルの空間」として構成したのだから，ごく自然な考え方であろう．

2. まずは参考のために，ユークリッド空間における速度ベクトル，勾配ベクトルたちの空間をどう構成したかまとめておこう：

   - ある $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ を固定し，そこを通る物体の軌跡として得られる曲線を（いろいろ）かんがえる．
   - そのうち，C^1 級曲線となるものをピックアップし，これらの速度ベクトル（時刻はパラメーター t によって刻まれている）として得られる縦ベクトル全体を $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ とあらわす．
   - $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ のコピーとみなせる．
   - 一方，（すくなくとも） $\boldsymbol{p}$ の近傍で定義された関数を（いろいろ）かんがえる．
   - そのうち C^1 級関数となるものをピックアップし，これらの勾配ベクトルとして得られる横ベクトル全体を $\mathrm{T}^*_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ とあらわす．

- $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}^*\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}_n$ のコピーとみなせる．
- $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}^*\mathbb{R}^n$ の各ベクトルは，$\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ の線形汎関数であり，ある意味で速度ベクトルを「測定」している．すなわち，速度ベクトルの全体 $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ と勾配ベクトルの全体 $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}^*\mathbb{R}^n$ はたがいに双対空間である．

3. さてこの構成過程を，C^1 級多様体 $M = M(X, \mathcal{A})$ に翻訳したい．$\mathbb{R}^n$ の部分を M におきかえシミュレートしてみると，われわれはすでに多様体上の「ある定点 $p \in M$ における速度ベクトル」が何か知っている（定義している）し，「（すくなくとも）$p \in M$ のまわりで定義された C^1 級関数」が何かも知っている．

   あとは「勾配ベクトル」であるが，ユークリッド空間での考察から，勾配ベクトルも速度ベクトルとよく似たものであり，同じような手続きで定義できると期待できる．その手続きとは，

   > p を通る物体の「勢いと方向」を地図帳の各ページで速度ベクトルとして表現し，かつすべての表現を同一視することでベクトルとみなす

   ことであった．したがって，われわれは

   > p におけるある関数の「変化の様子」を地図帳の各ページで勾配ベクトルとして表現し，かつすべての表現を同一視することでベクトルとみなす

   べきであろう．以下では，その同一視の条件をさぐることにする．

4. ある一点 $p \in M$ と，すくなくとも p の近傍で C^1 な関数 $F : M \to \mathbb{R}$ を固定しよう．ユークリッド空間から類推すれば，関数には速度ベクトルを「測定」する機能があると思われる．そこで，点 p における速度ベクトル $v \in \mathrm{T}_pM$ をひとつピックアップして，これを v で「測定」してみよう．しかし「測定」といっても，多様体の中で何をどう測ればよいのか．

5. まず，速度ベクトル v といっても，それだけがポツリと存在しているわけではなくて，ある運動する物体の「勢いと方向」としてこそ意味をもつ．すなわち，時間 h でパラメトライズされた多様体内の曲線 $h \mapsto x(h) \in M$ で，$p = x(0)$ を満たし，かつ速度ベクトルが v となっているものを具体的にもってこなければならない．（ここで $h \in \mathbb{R}$ は 0 に近いものだけ考えれば十分であろう．）そのうえで，この曲線にそって F の値の変化を見，速度ベクトル v を「測定」することになるであろう．

6. しかも，多様体はあいわらず宇宙のように広く大きいため．われわれが実際に扱えるのは地図帳のみである．すなわち，局所座標を通してしか，関数も速度ベクトルも扱うことができないのであった．

7. 接空間の場合と同様に，$p \in U_\lambda$ となる添え字 λ 全体の集合を $\Lambda(p)$ と書くことにする．たとえば $\lambda, \mu \in \Lambda(p)$ を選んだとき，関数 F の「変化の様子」は局所座標 ϕ_λ, ϕ_μ によって異なる勾配ベクトルとして表現されるであろう．しかし，速度ベクトルと同様に，これらは何からの関係式を通じて「同期」されているはずである．しかもその関係式によって，関数 F の「速度ベクトル測定器」としての機能が局所座標に依存しない形で保たれるはずである．すなわち，同じ $v \in \mathrm{T}_pM$ を測定していれば，ϕ_λ, ϕ_μ など異なるページで実行しても，その「測定値」は同じものでなくてはならない．

8. 以上のような要請を念頭において，関数 F と速度ベクトル v の局所座標による表現を比較していこう．

   まずは $\phi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{V}_\lambda \subset \mathbb{R}^n_\lambda$ を考える．点 p および速度ベクトル v の ϕ_λ を通した表現をそれぞれ $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_\lambda \in \mathbb{V}_\lambda$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\lambda \in V_p(\lambda)$ とする．また，速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ 単体では具体性がないので，曲線
$$\boldsymbol{x}(h) \ := \ \phi_\lambda(x(h))$$
   を考える．（細かいことをいえば，h は十分 0 に近い範囲だけを考えているので，$x(h)$ は局所座標 ϕ_λ の定義域 U_λ に含まれているとしてよい．）さてこの曲線は速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ をもつので，$h \approx 0$ もしくは $h \to 0$ のとき
$$\boldsymbol{x}(h) \ = \ \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}h + \boldsymbol{o}(h)$$
   という一次近似をもつ．

9. 次に関数 F の表現をみておこう．いつものことだが，$F_\lambda := F \circ \phi_\lambda^{-1} : \mathbb{V}_\lambda \to \mathbb{R}$ を考えればよい．F の C^1 性から F_λ は C^1 級である．すなわち F_λ は $\boldsymbol{p}$ において全微分可能であって，$\Delta\boldsymbol{p}$ が小さい（短い）ベクトルであるとき，
$$F_\lambda(\boldsymbol{p} + \Delta\boldsymbol{p}) - F_\lambda(\boldsymbol{p}) \ = \ \mathrm{grad}\,(F_\lambda, \boldsymbol{p})\Delta\boldsymbol{p} + o(\|\Delta\boldsymbol{p}\|)$$
   という一次近似をもつ．

10. さてここで，
$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x(h)) - F(x(0))}{h}$$
   という量を考えてみよう．ユークリッド空間であれば，これは曲線にそった微分であって，方向微分に対応する．しかし多様体では，一見このような量は意味をもたないようにも見える．

11. とりあえず，分子の局所座標 ϕ_λ による表現では
$$F(x(h)) - F(x(0)) \ = \ F_\lambda(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}h + \boldsymbol{o}(h)) - F_\lambda(\boldsymbol{p})$$
   となるから，上の全微分の式に $\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}h + \boldsymbol{o}(h)$ を代入して
$$\begin{aligned} F_\lambda(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}h + \boldsymbol{o}(h)) - F_\lambda(\boldsymbol{p}) \ &= \ \mathrm{grad}\,(F_\lambda, \boldsymbol{p})(\boldsymbol{v}h + \boldsymbol{o}(h) + o(\|\boldsymbol{v}h + \boldsymbol{o}(h)\|) \\ &= \ \mathrm{grad}\,(F_\lambda, \boldsymbol{p})\boldsymbol{v}h + o(h) \end{aligned}$$
   を得る．よって，
$$\frac{F(x(h)) - F(x(0))}{h} \ = \ \mathrm{grad}\,(F_\lambda, \boldsymbol{p})\boldsymbol{v} + o(1) \ \to \ \mathrm{grad}\,(F_\lambda, \boldsymbol{p})\boldsymbol{v} \quad (h \to 0)$$
   でなくてはならない．これは，ひとつの実数である．

12. この量がいったい何なのか，という問いは後回しにして，以上の議論を別の局所座標 $\phi_\mu : U_\mu \to \mathbb{V}_\mu \subset \mathbb{R}^n_\mu$（ただし $\mu \in \Lambda(p)$）を通して眺めてみよう．点 p および速度ベクトル v の表現 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_\mu$，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_\mu$ が一意的に定まるから，やはり曲線 $x(h) \in M$ の表現
$$\boldsymbol{y}(h) \ := \ \phi_\mu(x(h)) \ = \ \boldsymbol{q} + \boldsymbol{u}h + \boldsymbol{o}(h) \quad (h \to 0)$$

となる．また，関数の表現 $F_\mu := F \circ \phi_\mu^{-1} : \mathbb{V}_\mu \to \mathbb{R}$ についても，

$$F_\mu(\boldsymbol{q}+\Delta\boldsymbol{q}) - F_\mu(\boldsymbol{q}) \;=\; \mathrm{grad}\,(F_\mu,\boldsymbol{q})\Delta\boldsymbol{q} + o(\|\Delta\boldsymbol{q}\|)$$

が成立する．よって，ページ λ の場合と同様の議論により

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x(h)) - F(x(0))}{h} \;=\; \mathrm{grad}\,(F_\mu,\boldsymbol{q})\boldsymbol{u}$$

をえる．

13. この左辺の極限だけを見ると，局所座標とは関係ないところで，多様体上の関数 F，多様体内のある一点 p，そこを通る物体の軌跡 $x(h)$ のみによって定義されている．すなわち，われわれの観測行為とは独立して，多様体内で独自に，ある量が定まっているのである．[1] なんとなく気味が悪い感じがするが，ともあれその量を局所座標を通して観測し，数値化したものが右辺の数だ，ということになる．

    したがってわれわれは，同じ量を異なる局所座標により観測したわけだから，

    $$\mathrm{grad}\,(F_\lambda,\boldsymbol{p})\boldsymbol{v} \;=\; \mathrm{grad}\,(F_\mu,\boldsymbol{q})\boldsymbol{u}$$

    でなくてはならない．

14. ちなみに，この値は曲線 $x(h)$ ではなく，そこでの速度ベクトル v により定まる量とかんがえられる．もちろん $x(h)$ という曲線には無数の選び方があるが，局所座標を通して具体的な計算を行う過程をみると，極限操作により曲線の個性は失われて，ただただ p と v に由来する量だけが残ることがわかる．

    その意味で，

    $$\lim_{h\to 0}\frac{F(x(h)) - F(x(0))}{h}$$

    という量は，F と p，v だけで計算できてしまった量なのである．これは，関数 F によって速度ベクトル v を「測定」した，その測定値といえるのではないだろうか．

15. さて関係式

    $$\mathrm{grad}\,(F_\lambda,\boldsymbol{p})\boldsymbol{v} \;=\; \mathrm{grad}\,(F_\mu,\boldsymbol{q})\boldsymbol{u}$$

    から，勾配ベクトル $\mathrm{grad}\,(F_\lambda,\boldsymbol{p})$ と $\mathrm{grad}\,(F_\mu,\boldsymbol{q})$ の関係式を導こう．

    いま，$v = [\boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{u}]$ であったから，$\boldsymbol{u} = D\Phi(\boldsymbol{v})$ をみたす．ただし，$D\Phi$ は Φ の $\boldsymbol{p}$ における微分写像であり，Φ の $\boldsymbol{p}$ におけるヤコビ行列を $\boldsymbol{J}$ とすると $D\Phi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{v}$ とかける．ここで，$\boldsymbol{J}$ は n 正則行列であるから，上の式の左辺を $\mathrm{grad}\,(F_\lambda,\boldsymbol{p})\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{v}$ と変形すれば

    $$\mathrm{grad}\,(F_\lambda,\boldsymbol{p})\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{u} \;=\; \mathrm{grad}\,(F_\mu,\boldsymbol{q})\boldsymbol{u}$$

    がなりたつことになる．いま速度ベクトル v は最初に自由に定めたものであり，この関係式はすべての $\boldsymbol{u} \in V_p(\mu) \simeq \mathbb{R}^n$ でなりたつことになる．したがって，n 次元横ベクトルとしての等式

    $$\mathrm{grad}\,(F_\lambda,\boldsymbol{p})\boldsymbol{J}^{-1} \;=\; \mathrm{grad}\,(F_\mu,\boldsymbol{q})$$

[1] この量は C^1 多様体という構造の上に，C^1 関数が「のる」ことによって自動的に発生しているように見える．しかし「関数」とは，われわれが多様体内にひろがる「スカラー場」として観測して初めて存在が確認できるものである．その意味では，この量が真の意味で独立して存在しているのか，疑問がのこる．やはり観測者（地図帳の作成者）がかかわって初めて，意味をもつのではないだろうか．

が成立することがわかった．この式が,「勾配ベクトル」の表現たちが満たすべき関係式である．ちょうど，速度ベクトルの表現の違いがキャンセルされるように，勾配ベクトルの表現たちも一緒に変化すると考えられる．

16. 以上の議論では関数 $F: M \to \mathbb{R}$ を固定して考えていたが，もしこれが別の関数に変化すれば，その各ページにおける表現たちは一斉に勾配ベクトルを変化させる．そのとき，異なるページごとの勾配ベクトルは上の関係式をみたしながら変化するのである．

6.4 余接空間

1. ここでは，接空間の定義に完全に沿う形で余接空間を定義する．

2. 多様体内のある点 p を固定する．いま，地図帳の λ ページ目にその像 $\boldsymbol{p} = \phi_\lambda(p) \in \mathbb{R}^n_\lambda$ が写っているとしよう．

   $\boldsymbol{p}$ の近くで定義された C^1 級関数をすべて考え，$\boldsymbol{p}$ における勾配ベクトルを考える．これらは，n 次元横ベクトルであり，その集合を $G_p(\lambda)$ とする．逆に $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_n$ を何でもよいからもってくれば，

   $$\mathrm{grad}\,(F, \boldsymbol{p}) \;=\; \boldsymbol{a}$$

   となる C^1 級関数を見つけることはたやすい．したがって，$G_p(\lambda)$ とは $\boldsymbol{p}$ を始点とする n 次元横ベクトルをすべてあつめたものであり，$\mathbb{R}_n$ のコピーが $\boldsymbol{p}$ を中心に置かれているともみなせる．とくに，$G_p(\lambda)$ が n 次元ベクトル空間となることは明らかであろう．

3. さて形式的な和集合

   $$G_p \;:=\; \bigcup_{\lambda \in \Lambda(p)} G_p(\lambda)$$

   を考える．これは横ベクトルの空間 $\mathbb{R}_n$ をコピーして，$\Lambda(p)$ の分だけ束ねたものである．

4. G_p のベクトル $\boldsymbol{a} \in G_p(\lambda)$ と $\boldsymbol{b} \in G_p(\mu)$ （ただし $\lambda, \mu \in \Lambda(p)$）が $\boldsymbol{a} \sim^* \boldsymbol{b}$ であるとは，以下をみたすときをいう：

   > $\boldsymbol{p} = \phi_\lambda(p) \in \mathbb{V}_\lambda$ の近傍で定義された写像 $\Phi = \phi_\mu \circ \phi_\lambda^{-1}$ に関して，
   >
   > $$\boldsymbol{b} \;=\; \boldsymbol{a}\boldsymbol{J}^{-1}$$
   >
   > がなりたつ．ただし，$\boldsymbol{J}$ は $\boldsymbol{p}$ における微分写像 $D\Phi = D\Phi$ に対応する Φ のヤコビ行列である．

5. これは G_p 内に同値関係を定めることがわかる（ふたたび練習問題）．

6. この商集合 $G_p/\sim^*$ を多様体 M の p における**余接ベクトル空間** (cotangent vector sppace) もしくは簡単に**余接空間** (cotangent space) とよび，記号 T^*_pM で表す．

7. この商集合は，つぎのように解釈できる：多様体上の関数そのものの「$p \in M$ における局所的な変化の様子」は，ユークリッド空間上の関数のように全微分による式表示をもたず，したがって勾配ベクトルというかたちで数値的に表現できない．しかし多様体上の関数は，世界地図における海抜高度のように，地図帳の各ページではユークリッド空間上の関数として表現できる．すなわち，関数の変化の様子は添え字 $\Lambda(p)$ をもつ各ページたちの上で（異なる）勾配ベクトルとして一斉に表現できる．この「数ベクトルたちが一斉に表現しているもの」は，多様体内の関数の特徴を表す確固とした「なにか」である．これに当面の名前をつけ，寄せ集めたものが T_p^*M である．

8. T_p^*M の元を p における**勾配ベクトル** (gradient vector) もしくは**余接ベクトル** (cotangent vector) とよぶ．一般的には余接ベクトルとよぶが，ここでも直感を重視してあえて勾配ベクトルという言葉を使い続けよう．

9. さて次に，T_p^*M の元が「ベクトル」と呼ばれるに値するものであることを確認する．実際，T_p^*M は $\mathbb{R}_n$ と同型なベクトル空間となる．

10. これを確認するためには，接空間と同様，以下を納得すればよい：

    (a) T_p^*M のベクトルに，和とスカラー倍の演算が定義できること．
    (b) これらの演算のもと，T_p^*M がベクトル空間の公理を満たすこと．
    (c) T_p^*M がある $\lambda \in \Lambda(p)$ にたいし，$G_p(\lambda)$ と同型であること

    ここでは (a) のみ確認しておく．

11. まず，$a, b \in \mathrm{T}_p^*M$，$\alpha \in \mathbb{R}$ とする．このとき，任意の $\lambda \in \Lambda(p)$ において，表現 $a = [\boldsymbol{a}_\lambda]$ および $b = [\boldsymbol{b}_\lambda]$ が存在する．いま，T_p^*M における和とスカラー倍を

$$a + b \ := \ [\boldsymbol{a}_\lambda + \boldsymbol{b}_\lambda], \quad \alpha b \ := \ [\alpha \boldsymbol{b}_\lambda]$$

で定義しよう．はたして右辺は λ の選びかたに依存せず定まるのだろうか？

いま，$\boldsymbol{a}_\lambda, \boldsymbol{b}_\lambda \in G_p(\lambda)$ であり，$G_p(\lambda)$ はベクトル空間であるから，

$$\boldsymbol{a}_\lambda + \boldsymbol{b}_\lambda \in G_p(\lambda)$$

である．一方，ある別の $\mu \in \Lambda(p)$ についても，同値類の表現 $a = [\boldsymbol{a}_\mu]$ および $b = [\boldsymbol{b}_\mu]$ をとれば

$$\boldsymbol{a}_\mu + \boldsymbol{b}_\mu \in G_p(\mu)$$

が成立している．いま，写像 $(D\Phi)^* : G_p(\lambda) \to G_p(\mu)$ を $(D\Phi)^* : \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a}\boldsymbol{J}^{-1}$ で定義しよう．$G_p(\lambda)$ と $G_p(\mu)$ は横ベクトルの空間 $\mathbb{R}_n$ のコピーであったから，この写像は全体の転置をとると $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への同型写像 ${}^t\boldsymbol{a} \mapsto {}^t(\boldsymbol{J}^{-1}){}^t\boldsymbol{a}$ と同じである．（$\boldsymbol{J}$ は正則行列であるから，転置しても正則である．）したがって，$(D\Phi)^* : G_p(\lambda) \to G_p(\mu)$ は同型写像となる．とくに，

$$(D\Phi)^*(\boldsymbol{a}_\lambda + \boldsymbol{b}_\lambda) \ = \ (D\Phi)^*(\boldsymbol{a}_\lambda) + (D\Phi)^*(\boldsymbol{b}_\lambda) \ = \ \boldsymbol{a}_\mu + \boldsymbol{b}_\mu$$

がわかる．したがって同値類として

$$[\boldsymbol{a}_\lambda + \boldsymbol{b}_\lambda] \ = \ [\boldsymbol{a}_\mu + \boldsymbol{b}_\mu] \in \mathrm{T}_p^*M$$

が成立する．これは，上の $a+b$ の定義に従えば，添え字 $\lambda \in \Lambda(p)$ の選び方によらず T_p^*M 内で唯一の元が定まることを示している．スカラー倍も同様である．

12. いま，多様体上の関数 F があるとき，$\boldsymbol{p} = \phi_\lambda(p)$ における勾配ベクトル $\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\,(F \circ \phi_\lambda^{-1}, \boldsymbol{p})$ が定まる．このとき，T_p^*M の元 a で $a = [\boldsymbol{a}]$ を満たすものを F の $\boldsymbol{p}$ における勾配ベクトルと呼び，

$$a \;=\; \mathrm{grad}\,(F, a)$$

で表すことにする．もちろん，この元は添え字 λ の選び方にはよらずに決まる．この定義が理にかなっていると思えるならば，おそらくあなたはこの節の内容を完全に理解している．

6.5 接空間との双対性

1. 最後にこの節では，余接空間 T_p^*M が接空間 T_pM の双対空間であることを確認する．これは，多様体内の勾配ベクトルと速度ベクトルが，互いを「測り，測られる」関係にあることを示している．

2. **線形汎関数としての勾配ベクトル．** 関数 F により速度ベクトル $v \in \mathrm{T}_pM$ を「測定」するというアイディアは，さきほどの議論でいうところの量

$$\lim \frac{F(x(h)) - F(x(0))}{h}$$

を計算する部分に集約されている．これは見かけ上曲線 $x(h)$ というものを媒介しているが，実質的には関数 F と速度ベクトル v によって定まる量であった．

さてこの量は局所座標 ϕ_λ を経由することで

$$\mathrm{grad}\,(F_\lambda, \boldsymbol{p})\boldsymbol{v}$$

と表現されたから，地図帳の λ ページを見る限りでは「速度ベクトル測定器」としての本質は勾配ベクトル $\mathrm{grad}\,(F_\lambda, \boldsymbol{p})$ にある．この性質を多様体の勾配ベクトルの性質として解釈しよう．

3. いま，勾配ベクトル $a \in \mathrm{T}_p^*M$ をひとつ固定する．このとき，写像 $P_a : \mathrm{T}_pM \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：

> $\lambda \in \Lambda(p)$ をひとつ決めれば，$a = [\boldsymbol{a}]$, $v = [\boldsymbol{v}]$ を満たす $\boldsymbol{a} \in G_p(\lambda)$ （横ベクトル）および $\boldsymbol{v} \in V_p(\lambda)$ （縦ベクトル）が定まる．そこで，
>
> $$P_a(v) \;:=\; \boldsymbol{a}\boldsymbol{v} \;=\; \left\langle {}^t\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \right\rangle \;\in\; \mathbb{R}$$
>
> と定義する．ただし，内積記号は $\mathbb{R}_\lambda^n$ における，$\mathbb{R}^n$ のコピーとしての標準内積である．

この定義に従えば，添え字 λ を変えても $P_a(v)$ の値は同じものとなる．(読者はこれまでの議論を思い出し，確認してみるとよい．) すなわち，P_a は勾配ベクトル a で速度ベクトル v を「測定」したものなのである．

4. P_a が線形汎関数であることをみておこう．$u, v \in \mathrm{T}_pM$ をとると，局所座標 ϕ_λ による表現を仲介して

$$P_a(u+v) \ = \ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \ = \ \boldsymbol{a}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{a}\boldsymbol{v} \ = \ P_a(u)+P_a(v)$$

が成立する．ただし，$u=[\boldsymbol{u}]$ である．スカラー倍について

$$P_a(\alpha v) \ = \ \alpha P_a(v)$$

が成立することも容易に分かる．

5. いま，P_a は写像を表す記号であるが，これは勾配ベクトル a と完全に対応している．その意味で写像そのものを $P_a(v)=a(v)$ と書いても違和感は無いであろう．行列の要領で，$P_a(v)=av$ と書いたってよかもしれない．すなわち，勾配ベクトル $a \in \mathrm{T}_p^*M$ には

   - 関数の p における「変化の様子」を記号化したベクトル
   - 速度ベクトルを「測定」する，線形汎関数

   としてのふたつの役割が備わっている．

   しかし，ひとつの記号にふたつ以上の役割を与えるのは混乱を招く場合があるだろうから，P_a といった記号もつかうほうがよいかもしれない．

6. ともあれ，以上で勾配ベクトル $a \in \mathrm{T}_p^*M$ が接空間 T_pM に線形汎関数として作用し，したがって余接空間 T_p^*M が T_pM の双対空間であることがわかった．