

第4章 多様体の基礎のキソ

さて、この章からが本題である。現代幾何学の主たる研究対象である、「多様体」とは何か。まずは、その定義を理解することからスタートする。これまでに何度か述べてきた、「局所的にユークリッド空間とみなせるような空間」とは何なのか、そしてわれわれの素朴な空間認識と、どのように関係しているのか、理解していこう。

4.1 「多様体」とは何か

—— 宇宙の外には何がある？

そんな疑問を抱いたことはないだろうか。科学に関心のある人なら、少なからずそのような質問を耳にしたり、誰かに問いかけたりしたことがあるだろう。¹

数学者（かならずしも宇宙論の専門家ではない。念のため）によるひとつの回答は、

—— 「外」なんてものは必要ない

である。もうすこし正確に言えば、「外に空間があることを仮定せずに、宇宙そのものだけを見て研究ができる」ということである。

それを可能にするのが、「多様体」という空間概念である。「多様体」はそれ自身が独立した「世界」であり、数学者は（もちろん物理学者も）その中だけで、幾何学や解析学を成立させる術を知っている。宇宙がこの「多様体」であれば、「外の世界」のことを気にする必要も必然もないのである。²

ただこのようなレトリックには、若干の誇張がある。技術的な理由から、われわれは「多様体」を区分化し、それぞれを一旦ユークリッド空間という別の世界に投影させる。「外の世界」は不要だが、「中の世界」を投影する「別の世界」が必要なのである。

¹ 著者も大学で数学を学ぶまでは、「問いかける」側だった。今にして思えば、「外の空間」を無批判的にイメージしていた自分は、非常に人間的である。われわれは多くの場合時間を建物の中で過ごし、隔離された「外部」をもっている。その点、野生の動物はどうだろうか。

また直線や円はいつも平面の中に描かれるし、アニメの中ではいつも4次元空間などと言っている。初期の数学的概念が育まれる過程においても、「独立して存在する内部」という発想が生まれにくい環境なのかもしれない。

² 多様体はユークリッド空間内の部分集合として実現できる（埋め込むことができる）ことが知られている。そのような集合として多様体を定義する方法もある。（ソープ『微分幾何の基礎概念』、スピバック『多変数の解析学』など。）しかし、多様体に「外の世界」を仮定しては、多様体を定義するありがたみにかけてしまうように思えるのだが…。

4.1.1 多様体の定義

さっそく、多様体の定義をみてみよう。ただし、このままではあまりにも洗練されすぎているから、後付けでいろいろと解釈を加えながら理解していくことにする。

定義 (開被覆, 局所座標, 地図帳, n 次元多様体) :

(M1) M を位相空間とする。

(M2) n を自然数とする。添え字集合 Λ をもつ写像の族 $\mathcal{A} = \{\phi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{\lambda \in \Lambda}$ が位相空間 M の **地図帳** (atlas) であるとは、 \mathcal{A} が以下を満たすときをいう：

(a) $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ はそれぞれ M の **開被覆** (open covering) である。すなわち、 U_λ はそれぞれ M の開集合であり、かつ $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = M$ がなりたつ。

(b) すべての $\lambda \in \Lambda$ について、 $\phi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \phi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$ は同相写像。この ϕ_λ を U_λ 上の **局所座標** (local chart, local coordinate) とよぶ

(M3) 位相空間 M とその地図帳 \mathcal{A} とのペア (M, \mathcal{A}) を **多様体** (manifold) もしくは **n 次元多様体** (n -dimensional manifold) とよぶ。ただし、地図帳の存在が暗に仮定されているときは、 M 自身を単に「多様体 M 」と呼ぶ。

(M4) $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ のとき、写像

$$\Phi_{\lambda\mu} := \phi_\mu \circ \phi_\lambda^{-1} : \phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \rightarrow \phi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

は同相写像であるが、これがすべての $\mu, \lambda \in \Lambda$ について C^α 級であるとき、 M を **C^α 級多様体** (C^α -class manifold) とよぶ。ただし、 $0 \leq \alpha \leq \infty$ もしくは $\alpha = \omega$ (解析的関数) とする。とくに C^0 級多様体は **位相多様体** (topological manifold) とよばれる。

以下では、これらの定義の意味を解釈していこう。

4.1.2 多様体の定義：解釈編

まず大雑把に多様体をイメージしようと思ったら、現代人にとっての「宇宙」や、古代人にとっての「地球 (の表面)」のような具体的な存在をイメージすると分かりやすい。広がりをもった空間 (もしくは曲面) として局所的には認識はできるが、あまりにも大きすぎてその全体像がわからない、そういう「存在」である。

そのような空間を念頭において、上の定義を解釈していこう。

(M1) **最初にある位相空間。** (M1) が述べているのは、 M はすでに存在が確定した位相空間だ、ということである³。われわれにとっての「宇宙」や「地球」のように、はっきりとそ

³ふつうはここで、 M が Hausdorff 空間であること、第2可算公理を満たすことも条件として加えたりする。

ここに（ここに）存在している。数学的にいえば、 \mathbb{R}^3 自身やその中の単位球面のように、集合として完全に特定できなくてはならない。

ただし、確固とした存在感をもった「モノ」でも、材質や形について十分な情報がない、という状態もありうる。太古の人類にとって、地球はまさにそのような「モノ」であった。たしかに自分は地面の上にいるのだが、地平線の果てに何があるのかよくわからない。もちろん、地球の全体像を知る由もないのである。

(M2) 地図帳づくり。 実際の地球表面は、回転楕円面（すこし横長だが、ほとんど球面）であることが知られている。その事実は人工衛星が打ち上げられるはるか昔、少なくとも18世紀には認識されていたようである。⁴このような大局的な形状についての知識は、探検家や学者たちが隅々まで歩きつくし、観測しつくした上で得られた、努力の賜物である。われわれが一点に留まり、あたりを見渡しただけでは、地球は平面だと錯覚してしまうのがオチだろう。

多様体の定義 (M2) では、そのような探検家たちの「隅々まで歩きつくす」努力がすでになされた状態であることを仮定する。その成果として得られた、「世界全図」がすでに与えられているのである。⁵

(a) 静止衛星による観測。 この状況を2次元多様体について、すこし「現代的に」イメージしてみよう。たとえば、 M は太陽系の、ある未知の小惑星だったとしよう。われわれ地球から M に向けて、集合 Λ （たとえば $\Lambda = \{1, 2, 3, \dots\}$ ）で番号付けされた多数の観測用衛星 $\{\phi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を打ち上げ、小惑星 M の上空に静止衛星として張り付かせる。衛星はそれぞれ、決まった領域 $U_\lambda \subset M$ の情報を $\phi_\lambda(U_\lambda) = \mathbb{U}_\lambda$ として \mathbb{R}^2 に記録する。（話しを簡単にするために、 M は小惑星の内部ではなく、表面の2次元的集合とみなしている。）ここで \mathbb{R}^2 は地図の記録紙としての役割を担っている。衛星から送られた画像を映し出す、高解像度のモニターのようなものだと考えてもよい。 Λ の元（写像） $\phi_\lambda: U_\lambda \rightarrow \mathbb{U}_\lambda$ は、 U_λ にかんする情報を ϕ_λ という衛星のカメラを通して観測する行為を数学のことで表現したのである。さらに、衛星は M 全体を隅々までカバーしている必要があるから、 U_λ たちの和集合は M でなくてはならない。それが (a)、「開被覆」という条件が要請していることである。こうして、われわれが作成する M の地図帳は、この小惑星の「世界全図」となるであろう。

6

(b) 観測結果の地図帳への記録。 衛星の観測結果を表現し記録する媒体として、 \mathbb{R}^n のコピーを Λ の数（衛星の数）だけ準備し、それぞれの $\lambda \in \Lambda$ に応じた添え字をつけて \mathbb{R}^n_λ なるそのような条件を設けないと、多様体上での解析学が必要以上にややこしくなってしまうからである。ここでは話を簡単にするために、余分な条件をくわえていない。

⁴フランスの数学者モーペルテュイ (Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, 1698 — 1759) は測量によって地球の扁平率を割り出し、1738年に公表している。地球が完全な球でないことを知ったとき、どんな気持ちになったものだろうか。

⁵これから調べようという空間について、すでに相当量の情報を持っていることになり、すこし奇妙な感じがする。

⁶この段階で U_λ が連結、という仮定を便宜的に加えることもあるが、あまり本質的な条件ではない。（ \mathbb{R}^2 に記録される像があまりにも変な集合だと、あとで解析するときに手間がかかるからである。）現段階では「定義」のみに集中して、余分な条件は考えないでおこう。

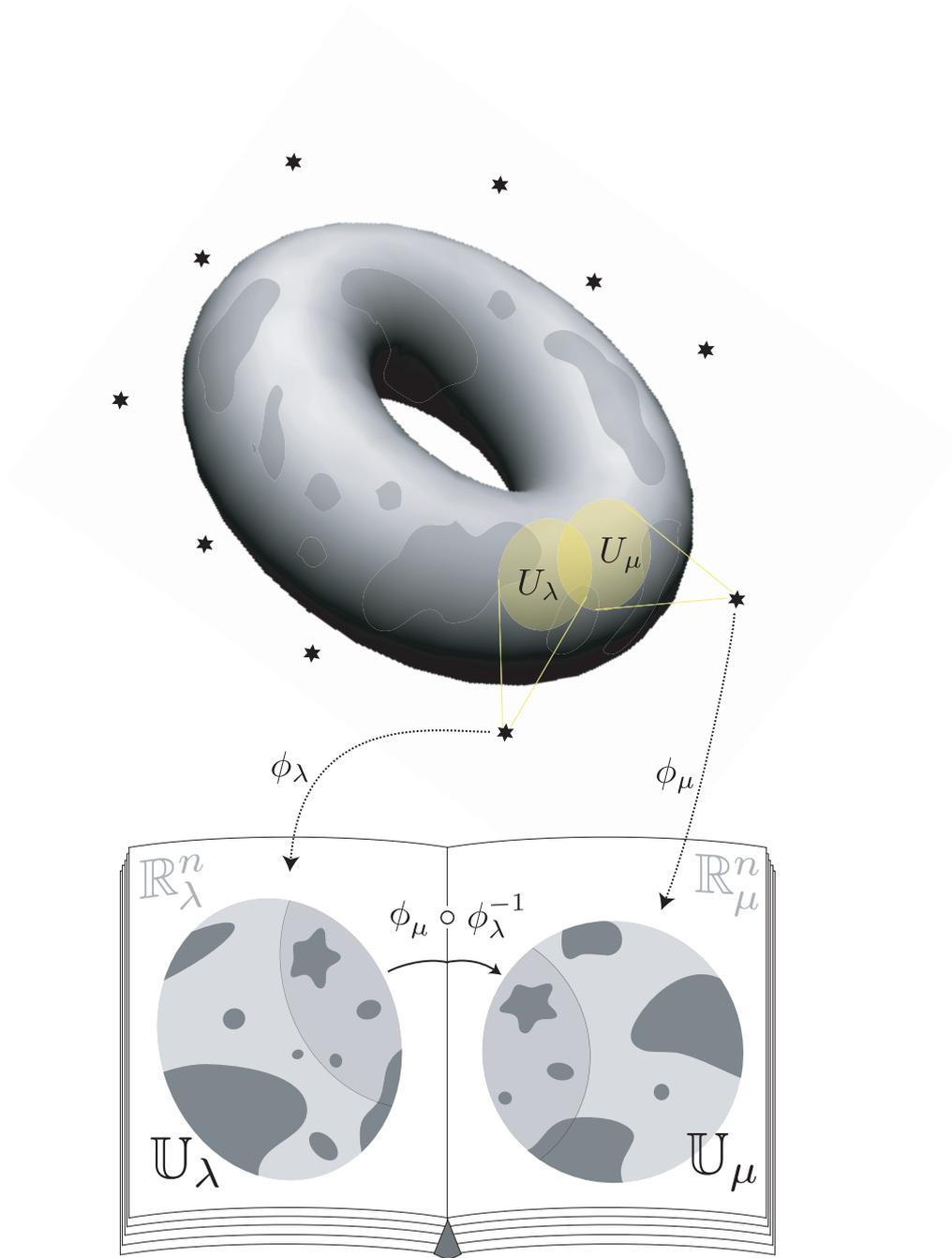


図 4.1: ある小惑星の地図帳. 無数の静止衛星で小惑星の表面を観測させる. 観測結果は即座に地図帳 (もしくはマルチモニター) に反映される. 地図帳のページ番号全体にあたるのが添え字集合 Λ である. 地図帳の各ページは \mathbb{R}^n のコピーからなり, 「 λ 」「 μ 」といったページ番号も記されている.

どと名前をつけておく。⁷これを束ねたものが白紙の地図帳である。さらに条件 (b) によって、この λ ページ目、すなわち \mathbb{R}^n_λ には、衛星 ϕ_λ の記録した像 U_λ が記録される。

このように観測と記録が一体化されたシステムが、定義における**地図帳** A の実体である。⁸

(M3). さてこのような地図帳 A を備えた位相空間 M を**多様体**とよぶ。厳密にはペア (M, A) を多様体と呼ぶべきであるが、ふつうは地図帳の存在は文脈のなかで暗に認めて単に位相空間 M を「多様体」と呼ぶ。たとえば鉄腕アトムのお茶の水博士について考えるとき、わざわざ「お茶の水氏と博士号のペア」を考えることはしない。これと同じである。⁹ 思えば、位相空間 M だって集合と位相（開集合系）のペアなのであった。

以下では位相空間 M はある地図帳 A とセットになった多様体 $M = (M, A)$ として扱う。

(M4) **ページとページのつながり**。日本の道路地図帳を用いて、青森から鹿児島までを車で移動する旅行の計画を立てる場面を想像してみよう。青森の載ったページを開き、南に向かう大きな国道を追っていくと、すぐにそのページからはみ出てしまい別のページに移動しなければならなくなる。そのような作業を鹿児島の載ったページまで延々と続けていけば、旅行経路が難なく確定してしまうだろう。

ふつう、地図帳の各ページは上下左右の端が他のページと重複するようになっていて、この部分を通じてページ間の「つながり」を読み取ることができる。多様体の地図帳においても、こうしたページ同士のつながりは想像以上に重要な役割を果たすことになる。

一般に、地図帳 A のある 1 ページだけを見ても、多様体 M の全貌がわかることはない。(もちろん、小さな島の地図が 1 ページに収まっている場合は別だが。) したがって多様体 M について何か大局的な情報を得たければ、地図帳の利用者であるわれわれ自身が、ページとページがつながっている部分を順次追っていき、ページごとの細切れの情報をつないでいく必要がある。それは、頭の中で地図を切り貼りしているようなものである。このとき、貼り合わせ方の情報が明確に与えられることで、初めて多様体 M の全体像が把握できるようになるのである。¹⁰ このような「つながり具合」の性質を規定するのが、(M4) の写像

$$\phi_\mu \circ \phi_\lambda^{-1} : \phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \rightarrow \phi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

に関する条件である。この写像が同相写像であることは (b) から保証されているが、定義 (M4) ではさらに、何回微分できるか、といった性質にも関心を抱いているようである。この部分については、節を改めて解釈をすすめることにしよう。

⁷現代ほど、あるもののコピーが複数ある、という状況を簡単にイメージできる時代ない。産業革命前の人間には難しかったかも？

⁸地図帳 (atlas) はカタカナでアトラスとも呼ばれる。このアトラスはもともとギリシャ神話に登場する巨人で、両腕で天を支える神、とされる。地図帳をアトラスと呼ぶのは、16 世紀にメルカトルが世界地図帳の表紙としてアトラスを描き、以後地図帳といえはこのアトラスが描かれるようになったからだ、という。

⁹「ブラック・ジャック先生」には医師の免許がないので多少注意が必要かもしれない。

¹⁰建物の構造を把握するのに、あの部屋とあの部屋がああドアでつながっていて…、などと思いを巡らせているときにも似ている。

4.1.3 ノート.

1. わざわざ位相空間に地図帳をセットにして考えるのは、数学的に自然なのだろうか？ 多様体を考えなければならない状況というのは、たとえば「位相空間 M 自体は確固とした存在だが、何らかの事情があつて、そのままでは研究ができない（あまりにも大きすぎる、熱くて近寄れない、暗くて見えない、あまりにも遠くにある、などなど）。とにかく、諸事情あつて、われわれが直接手に取ることができるのは、この地図帳に書かれた情報のみだ」といった状況なのだろう。どこか違和感が漂うのは、未知の世界であるはずの空間に、すでに「世界全図」が与えられている、という部分である。これはもう、致し方ないのだろうか。
2. 一般に、多様体の地図帳 \mathcal{A} は位相空間 M の情報をフルに引き出すとは限らない。実際は C^∞ 多様体なのに、 C^1 多様体分の情報しか観測できてない（もしくはわれわれが使わない）可能性もある。
3. 同じ M の地図帳 $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ でも、内容が違えば ($\mathcal{A} \neq \mathcal{A}'$ ならば) ペア (M, \mathcal{A}) とペア (M, \mathcal{A}') は異なる多様体と解釈する。球面とエキゾチック球面の例のように、一般に異なる地図帳は異なる「構造」を定める、と考えられている。一方で、異なる地図帳がいつ同じ「構造」をもつ（とみなす）かも興味の対象となる。

4.2 多様体上の関数

4.2.1 地図帳で表現された関数の整合性

位相空間の各点に数値（実数、複素数）をひとつずつ対応させる写像を、とくに関数とよぶのであった。ここでは、多様体 $M = (M, \mathcal{A})$ 上の関数をどのように表現し、解析すればよいのかを考えよう。

いま「位相空間 M 」上の関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ があたえられているとき、これを自動的に「多様体 M 」上の関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ とみなすことができる。問題は、多様体 M には直接接触することができないため、地図帳 \mathcal{A} を通してすべてを察するしかない、という点である。

ごく身近な例として、 M を地球の表面とし、海拔高度を与える関数 $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ を表現してみよう。ひとつの方法は、「地形図」とよばれるタイプの地図の真似をすることである。たとえば高い山は茶色、平地は黄緑色、深い海は群青色、といったふうに、海拔高度を色の違いや等高線で表現する。

いま、地図帳 \mathcal{A} の各ページには、衛星 $\{\phi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ たちが観測した海拔高度（関数の値）が記録される。すなわち、地図帳の λ ページ目を開くと、 $\phi_\lambda(U_\lambda) = U_\lambda$ で定義された実数値関数

$$F_\lambda = f \circ \phi_\lambda^{-1} : U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$$

が色や等高線などで描かれているであろう。重要なのは、この F_λ は \mathbb{R}^n のある領域から \mathbb{R} への関数であり、多変数関数の微分・積分が適用可能な対象だということである。

このとき、フランス全土のページの「パリ」も、欧州全図のページの「パリ」も、同じ色が塗られて、あたりには同じような等高線が描かれているはずである。このような「整合性」は多様体 M 地図帳を作成する時点で当たり前のこととして要請されている。

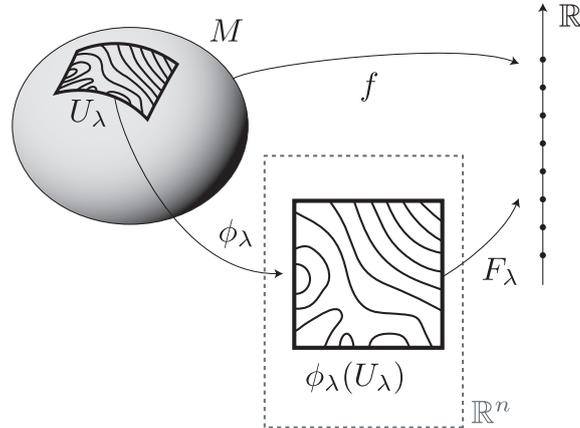


図 4.2: 地図帳のあるページに表現された多様体上の関数.

この「整合性」を、数学の言葉で書き直してみよう。いま、多様体 $M = (M, \mathcal{A})$ 上の関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ といった場合、実際にわれわれが見ることができるのは地図帳 \mathcal{A} の観測システムを通した（具体的には局所座標 $\phi_\lambda: U_\lambda \rightarrow \mathbb{U}_\lambda$ を通した）関数

$$F_\lambda = f \circ \phi_\lambda^{-1}: U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$$

の集まりである。これが、地図帳の各ページが海拔高度に応じて色づけされている状況を表現している。さらに、上で要請されている「整合性」とは、ページの重なる部分 $x \in U_\lambda \cap U_\mu$ において関係式

$$F_\lambda(\phi_\lambda(x)) = F_\mu(\phi_\mu(x))$$

が成立している、ということにほかならない。もちろんこの等式自体は（両辺それぞれ、 $f(x)$ を書き換えたものなので）ごく当たり前ののだが、われわれはそれを地図帳というシステムが満たすべきひとつの「整合性」として解釈したのである。¹¹

4.2.2 多様体上の関数の微分可能性

L.Bers という数学者の本『Riemann Surfaces』の冒頭に、「リーマン面とは何か？大雑把にいうと、複素解析的関数が定義できる曲面のことである。」という言葉がある。リーマン面（1次元複素多様体）のことを知っている人間にとっては、Bers の書き方は非常に「言い得て妙」という感じがする。

¹¹われわれが実際に地球を外からみたわけでもないのに、地図帳だけから「マリアナ海溝は深い」とか、「ヒマラヤ山脈は高い」などと漠然としたイメージを持てるのは、こうした地図帳上のページごとの関数から「整合性」を理解し、多様体上の関数として再解釈を行っているからだといえる。

Bers は同様に、「多様体 M が C^p 構造を持つとは、 M 上の実関数が C^p 級関数として識別できるときをいう」とも述べている。そうなるように、 C^p 級多様体を定義するわけである。その精神に則れば、「 C^1 級多様体とは、 C^1 級関数が定義できる多様体である」と言ってもよい。以下では、この言葉を念頭におきつつ、多様体の定義の (M4) について理解をしよう。

多様体上の連続関数. まずは多様体 M 上の C^0 級関数、すなわち連続関数とは何か考えてみよう。これは難しくない。多様体 M はそもそも位相空間なので、単純に「開集合の逆像が開集合」と定義すればよいからである。「関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ が連続」という言葉はすでに明解な意味（というより、定義）をもっているのである。

さて、これを「多様体上の連続関数」とみたときの特殊性を理解するには、やはり地図帳の存在を考慮に入れるべきであろう。ただし、もう少し一般に「多様体上の C^α 関数」を考えたほうが、このあたりの事情が際立ってくる。

C^1 級多様体上の C^1 級関数. 多様体上の微分可能性を考えてみよう。無駄な一般化は避けて、 C^1 級関数についてのみ考えることにする。すなわち Bers 流に「 C^1 級多様体上では C^1 級関数が定義できる」を理解しよう。

まずは念のために、ユークリッド空間 \mathbb{R}^n 上の関数が C^1 級関数であることの定義を復習しておこう。 $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とするとき、関数 $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ が C^1 級関数であるとは、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U$ を変数とするとき、各成分 x_i についての偏導関数 $\mathbf{x} \mapsto \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ が存在し、連続関数であることをいう。

では、多様体の場合はどうか？

定義 (C^1 級多様体上の C^1 級関数): M は C^1 級多様体であると仮定する。関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ が C^1 級関数であるとは、すべての局所座標 $\phi_\lambda: U_\lambda \rightarrow \mathbb{U}_\lambda$ について、関数 $F_\lambda := f \circ \phi_\lambda^{-1}: U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ が C^1 級関数であることをいう。

この定義でとくに注意してほしいのは、「関数 f そのものが偏微分可能か、ということの問題にしているのではない」ということである。関数 f の偏導関数が存在するとも言っていないし、もちろん連続だとも言っていない。そもそも、 M の各点で実数値の「偏微分係数」が定まったりはしない。¹² あくまで局所座標を經由して地図帳の各ページ上（たとえば λ ページ目）に表現された関数（たとえば F_λ ）が、それぞれふつうのユークリッド空間で定義された関数の意味で C^1 級関数になっていますよ、と述べているだけである。別の言い方をすると、地図帳の各ページに等高線や色の分布として描かれた f の値が、そのページ固有の座標系（たとえば \mathbb{R}_λ^n の座標系）に関して、連続な偏導関数をもちますよ、と述べているだけである。その偏導関数の具体的な値については、一切気にしていない。（もう一度図 4.2 を見て、状況をイメージせよ。）

C^1 級関数であることの整合性. いまわれわれは、 M が C^1 級であると仮定したが、この仮定はどのように活かされているのだろうか？ 次のような問題を考えてみる：

¹² どうでもいいことだが、広辞苑をひくと「便秘」の次に「偏微分」が来る。

「(われわれ地球の) 世界地図帳をみたら, あるページのある地域で, 海拔高度が C^1 級に変化していた. このとき, この地域が記載されている別のページにおいても, 海拔高度は C^1 級に変化しているか?」

この問題を多様体の言葉に置き換えてみよう:

「関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ について, ある局所座標を通して表現された関数 $F_\lambda = f \circ \phi_\lambda^{-1}: U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ がユークリッド空間上の関数の意味で C^1 級関数であった. このとき, $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ となる μ について, $F_\mu = f \circ \phi_\mu^{-1}: \phi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ はユークリッド空間上の関数の意味で C^1 級関数といえるか?」

この答は多様体 M が定義 (M4) の意味で C^1 級多様体であるかどうか依存するのである. 理由を考えてみよう. いま, $F_\mu = F_\lambda \circ (\phi_\lambda \circ \phi_\mu^{-1})$ が (定義可能な範囲で) 成り立っている. もし M が C^1 級多様体であれば, $\phi_\lambda \circ \phi_\mu^{-1}$ の部分は微分可能かつ連続な導関数をもつ. 要するに C^1 級である. さてもし, 仮定のように F_λ が C^1 級であれば, $F_\mu = F_\lambda \circ (\phi_\lambda \circ \phi_\mu^{-1})$ は C^1 級関数の剛性であり, 合成関数の微分公式から F_μ 自身も C^1 級であると結論できる. (「4.3 多様体上の関数の 1 次近似」, 定理の下の注意参照.) すなわち, この場合上の問題の答は YES である.

一方, M が C^1 級でなければ, $\phi_\lambda \circ \phi_\mu^{-1}$ も C^1 級でないただの同相写像となりうる. この場合, F_μ が C^1 級になるとは限らない. $\phi_\lambda \circ \phi_\mu^{-1}$ のなめらかでなくガクガクツとなっている部分が F_μ に伝播してしまうからである.

ちなみに, 次のような例を作ることもできる. さほど難しくないので, ぜひ挑戦していただきたい:

練習問題. 次のような多様体 $M = (M, \mathcal{A})$ (ただし $\mathcal{A} = \{\phi_\lambda: U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{\lambda \in \Lambda}$) と多様体上の関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ の例を構成せよ:

- M は C^0 級だが C^1 級多様体でない.
- すべての局所座標 $\phi_\lambda: U_\lambda \rightarrow \mathbb{U}_\lambda$ について, 関数 $F_\lambda := f \circ \phi_\lambda^{-1}: U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ はふつうの意味で C^1 級関数.

ヒント: M を \mathbb{R} の開区間とし, 強引に局所座標をふたつ以上定義する. あとは ϕ_λ たちをうまく定義する.

C^1 級多様体であるという性質が,

地図帳のあるページのある地域で海拔高度を表す色が C^1 級に変化していれば, 同一地域が記載されている他のページにおいても, 海拔高度を表す色は C^1 級に変化している

といった「整合性」を保証するもの (十分条件) であることが理解されただろうか. より一般に, C^α 級多様体 ($\alpha \in [0, \infty]$) と C^α 級関数の関係も原理的にはまったく同じである.

「多様体上の関数の性質」と言ってよいもの。 もう一度繰り返すが、多様体上の C^1 級関数があたえられたとき、地図帳の各ページに表現された関数 F_λ たちはそれぞれ異なった形をしている。そのため、関数 f そのものの偏導関数は意味をもたない。それは、同じ地点での等高線の様子、地図帳のページごとの「図法」や「縮尺」の違いによって変化することに対応する。あるページで（そのページの用紙における）水平方向と垂直方向について海拔高度の偏微分係数を求めて、他のページの同一地点で同じことをやっても、一致しないのが当たり前である。

このように、ページごとの表現によって変化してしまうような性質（たとえば「あるページのある地点で垂直方向の偏微分係数 k をもつ」といった性質）は関数 f 本来の性質とみなされないのである。一方、「 C^1 級多様体上の）関数が C^1 級である」という性質は、それぞれ異なるページごとの表現の中で共通に表れる性質として定義されている。われわれはこのような局所座標に依存しない共通の性質だけを、「多様体上の関数の性質」と呼ぶのである。¹³

ノート.

1. 同様に、 C^n 級多様体上では、 $0 \leq r \leq n$ となる r に限り C^r 級関数が定義できることにも注意しておこう。
2. 地図帳を眺めてみると、あるページではロンドンー東京間がパリー東京間よりも遠く見え、あるページでは逆に見える。（実際は後者。）グリーンランドがオーストラリアより広く見えたり、逆に見えることもある。（やはり、実際は後者。）地図帳の個々のページにおける距離や面積は、地球固有の距離や面積を正確には反映していない。同様に、多様体自身の性質や多様体上の関数の性質は、地図帳を通すと局所座標（ページ）ごとに異なる形で表現されてしまう。のちほど多様体固有の距離や面積が存在する（定義できる）場合を考えるが、そのためには局所座標ごとの表現に「重なり部分の整合性」を保証する必要がある。

4.3 多様体上の関数の1次近似

最後に、多様体上の関数の局所的な変化をどのように表現すればよいか考えてみよう。すなわち、多様体 M 上の関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、ある点 p の十分小さな近傍で f がどのように変化しているのかを記述したい。

もし多様体ではなくてユークリッド空間上の関数であれば、われわれは即座に「微分」を用いるだろう。「微分積分の基礎のキソ」(2.1,1) でみたように、まず関数による等高線を描き、その一部を十分に拡大して、あたかも等高線が平行に並んでいるような状態になるまでにした絵を描く（図 2.3）。このとき、関数の変化の様子はほとんど「線形汎関数」のように見えるのであった。

¹³地球の地図帳のあるページ全体が砂漠になっていたからといって、地球全体が砂漠である、というのはおかしい。すべてのページ全体で共有されている、整合性のある性質のみを地球の性質とよぶべきであろう。

同じことを、多様体上でやってみよう。ただし、以下では M を C^1 級多様体、 f を C^1 級関数だと仮定する。局所座標において、微分係数を計算する必要があるからである。

記号. 今後のために、少しでも記号を減らす努力をしておこう。いま地図帳 $\mathcal{A} = \{\phi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{\lambda \in \Lambda}$ の「ページ番号」として、添え字 $\lambda, \mu \in \Lambda$ を使っているが、これを廃止する。そのかわり、局所座標そのものを添え字のように考え、

$$\mathcal{A} = \{\phi : U_\phi \rightarrow \mathbb{R}^n\}$$

と表現することにする。 $\phi_\lambda, \phi_\mu \in \mathcal{A}$ の代わりに、単に $\phi, \psi \in \mathcal{A}$ などを用いる。¹⁴

また、 $\phi : U_\phi \rightarrow \mathbb{R}^n$ による像 $\phi(U_\phi) \subset \mathbb{R}^n$ は頻繁に登場するので、これを \mathbb{U}_ϕ で表す。すなわち、 $\phi : U_\phi \rightarrow \mathbb{U}_\phi$ は全射同相写像である。

4.3.1 局所座標でみた関数の1次近似

とくに深い意味は無いが、以下では多様体 M の次元を $n = 8$ として議論を進める。¹⁵ また、くどいようだが多様体 M および関数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ は C^1 級と仮定している。

さてこのような関数について、「局所的な1次近似」は考えられるだろうか？例えば $x, p \in M$ について、 x が p に近づくとき、

$$f(x) - f(p) = A(x - p) + o(\|x - p\|)$$

といった表現が可能だろうか？そもそも、 $x - p$ という記号が意味するものがよくわからない。もうすこし具体的に、 M が地球の表面で、 x が「ロンドン」、 p が「パリ」であるとき、「ロンドン」-「パリ」とはいかなる意味か？一般に差 $x - p$ を定義するには M 内にベクトル空間のような和や定数倍の演算が必要であるが、このような条件は多様体に一切かかっていないのである。

多様体上の関数を定量的に観測するには、やはり地図帳を用いるしかない。いま適当に定点 $p \in M$ とそこでの局所座標 $\phi : U_\phi \rightarrow \mathbb{U}_\phi \subset \mathbb{R}^8$ (ただし $p \in U_\phi$) を決めて、関数

$$F_\phi = f \circ \phi^{-1} : \mathbb{U}_\phi \rightarrow \mathbb{R}$$

を考えてみよう。 $\phi(x) = \mathbf{x}$, $\phi(p) = \mathbf{p} \in \mathbb{U}_\phi$ とすれば、

$$f(x) - f(p) = F_\phi(\mathbf{x}) - F_\phi(\mathbf{p})$$

が成り立つ。原理的には、この右辺の量を調べれば $p \in M$ の近くで関数 f がどのように変化しているかが観測できるはずである。

¹⁴ $\phi_\lambda, \phi_\mu \in \mathcal{A}$ は「人工衛星第 λ 号機、第 μ 号機」といったイメージだが、 $\phi, \psi \in \mathcal{A}$ は「人工衛星 ϕ 」、「人工衛星 ψ 」と愛称(?)で呼ぶイメージ。

¹⁵ 無駄な具体化と無駄な抽象化、一体どちらがよいのだろう。ここでは、「どちらでもない」ものを選んだつもり。

地図帳での関数の記述. 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ が C^1 級であることから, これを地図帳の ϕ ページ目に表現した関数 $F_\phi = f \circ \phi^{-1}: \mathbb{U}_\phi \rightarrow \mathbb{R}$ も, ユークリッド空間 \mathbb{R}^8 の開集合 \mathbb{U}_ϕ 上の C^1 級関数である. この関数について, 「微分積分の基礎のキソ」でやったような「1次近似」を考えてみよう.

いま $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{U}_\phi \subset \mathbb{R}^8$ をベクトル変数とし, さらに $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_8) \in \mathbb{U}_\phi \subset \mathbb{R}^8$ を定点 (定数値ベクトル) とすれば, \mathbf{p} における関数 F_ϕ の1次 Taylor 展開は

$$F_\phi(\mathbf{x}) = \underbrace{F_\phi(\mathbf{p}) + a_1(x_1 - p_1) + \dots + a_8(x_8 - p_8)}_{1 \text{ 次関数}} + \underbrace{o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)}_{\text{誤差}}$$

の形で得られるのであった. ただし,

- a_1, \dots, a_8 は関数 F_ϕ と定点 \mathbf{p} にのみ依存する偏微分係数 $a_i = \left. \frac{\partial F_\phi(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{p}} = \frac{\partial F_\phi}{\partial x_i}(\mathbf{p})$ (0.98 や $-\sqrt{2}$ といった具体的な実数値) であり,
- 誤差部分に現れる $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| := \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + \dots + (x_8 - p_8)^2}$ は, Taylor 展開を眺めるときのスケール (顕微鏡の視野の幅) と解釈される

のであった. またベクトル $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_8)$ は F_ϕ の \mathbf{a} における「勾配ベクトル」であり,

$$F_\phi(\mathbf{x}) - F_\phi(\mathbf{p}) = (a_1 \ \dots \ a_8) \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_8 - p_8 \end{pmatrix} + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)$$

$$\iff F_\phi(\mathbf{x}) - F_\phi(\mathbf{p}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)$$

と変形できる. (すなわち, F_ϕ の増分 $\Delta F_\phi = F_\phi(\mathbf{x}) - F_\phi(\mathbf{p})$ は \mathbf{x} の増分 $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$ に関する線形汎関数 $\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{x}$ で近似される.) もとの多様体の関数として表現すれば,

$$f(x) - f(p) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)$$

である. もし関数 f が地球の表面 M で定義されていて, x はロンドン, p はパリだとすれば,

- われわれは地図帳 \mathcal{A} の, ロンドンとパリが載っている ϕ ページ目を開いており,
- $\mathbf{x}, \mathbf{p} \in \mathbb{U}_\phi$ はそれぞれロンドンとパリが ϕ ページ目の用紙のどこにあるかを表し,
- $\mathbf{x} - \mathbf{p} \in \mathbb{R}^8$ は, ϕ ページ目の用紙の上で, ロンドンがパリからみて上下左右どのあたりにあるかを表し,¹⁶
- $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \geq 0$ は, ϕ ページ目の用紙の上でのロンドンとパリの距離を定規で測った長さを表し,

¹⁶ $\mathbf{x} - \mathbf{p} \in \mathbb{U}_\phi$ とは限らない. 念のため.

- 勾配ベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^8$ は ϕ ページ目の \mathbf{p} のあたりで、等高線が上下左右どちら方向にどのぐらいの密度で並んでいるかを表す。

これだけの情報があればもとの関数 f のことは分かったような気分になるが、数学的にはひとつ不安な部分が残る。これらはすべて、局所座標 ϕ の取り方依存しているのである。地図への記録の仕方次第で、 \mathbf{x} , \mathbf{p} , \mathbf{a} は変化してしまう。とくに \mathbf{a} が変わってしまうのは大きい。関数の変化はなだらかにも、急にも見えてしまうのである。(したがって、この勾配ベクトルは多様体に固有の量とは見なせない!) 一体これで、なにか定量的なことがわかったことになるのであろうか?

局所座標への依存性. 念のために地図帳の別のページ $\psi \in \mathcal{A}$ で $p \in U_\psi$ となっているものを見てみよう。とりあえず、上と同じ手順を繰り返す。 $\psi: U_\psi \rightarrow \mathbb{U}_\psi \subset \mathbb{R}^8$ にたいし、 $x \in U_\psi$ をとり、 $\psi(x) = \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_8) \in \mathbb{U}_\psi$, $\psi(p) = \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_8) \in \mathbb{U}_\psi$ とおくと、 \mathbf{q} における関数 $F_\psi = f \circ \psi^{-1}: \mathbb{U}_\psi \rightarrow \mathbb{R}$ の勾配ベクトル $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_8)$ を用いて ($\|\mathbf{y} - \mathbf{q}\| \rightarrow 0$ のとき)

$$F_\psi(\mathbf{y}) - F_\psi(\mathbf{q}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{q}) + o(\|\mathbf{y} - \mathbf{q}\|)$$

と書ける。

いま $x, p \in U_\phi \cap U_\psi$ と仮定してよいから、

$$f(x) - f(p) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)$$

$$f(x) - f(p) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{q}) + o(\|\mathbf{y} - \mathbf{q}\|)$$

というふたつの表現を得た。

地図帳をめくってロンドンとパリが同時に含まれるページをふたつ探してみよう。それぞれのページの用紙上で、ロンドンがパリからみて上下左右どのあたりで、何 cm 離れているか、といったことは、地図帳の作り手の都合で適当に決定されてしまう。地球表面そのものの性質とはまったく無縁のことなのである。

同様に、ベクトル $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ とベクトル $\mathbf{y} - \mathbf{q}$ に直接的な関係は無い。一方でわれわれは、地図帳に描かれた等高線の変化にある種の相関があることを直感的に理解している。¹⁷ その相関が何なのか、明らかにしておこう。

ふたつの勾配ベクトルの関係. 地図帳で同一点 (たとえば「パリ」) が複数ページに印刷されている場合、それぞれの点における等高線の局所的な変化はページごとに独立しているわけではない。以下に述べるような意味で、ページ同士が連動しているのである。

さきほどの、地図帳 ϕ ページ目と ψ ページ目について考えてみよう。 $\Phi := \psi \circ \phi^{-1}$ と置くと、これは $\phi(U_\phi \cap U_\psi) \subset \mathbb{U}_\phi$ から $\psi(U_\phi \cap U_\psi) \subset \mathbb{U}_\psi$ への C^1 級同相写像である。(M は C^1 級多様体と仮定していたので。) それぞれのページに共通に描かれている地域がこの写像によって対応付けられている。とくに、 $\Phi: \mathbf{p} \mapsto \mathbf{q}$ である。このとき、 \mathbf{p} のまわりを顕微鏡

¹⁷ この感覚的な相関性はきわめて視覚的なので、コンピューターに理解させるのは難しいだろう。

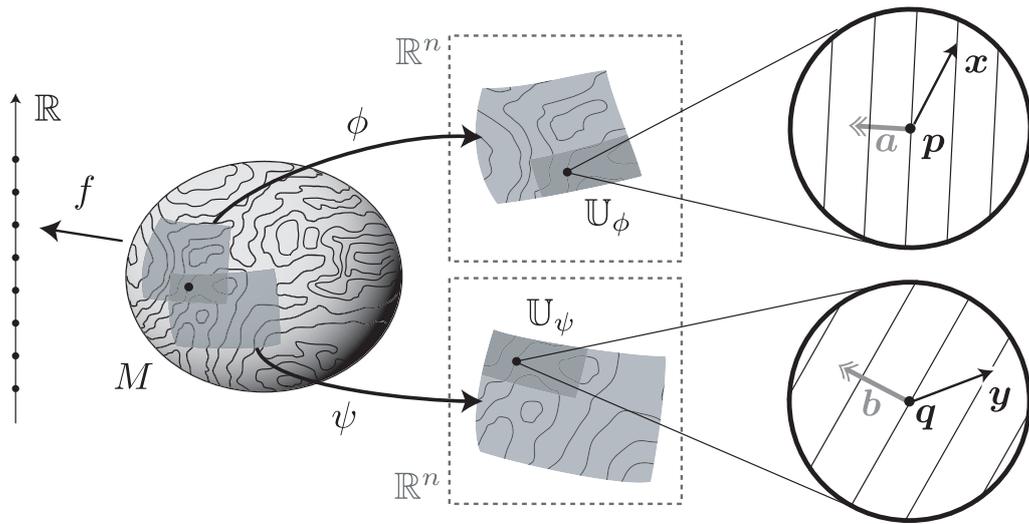


図 4.3: 与えられた関数の等高線を地図帳の異なるページで表現すると、それぞれ違った方向に違った間隔で並ぶ。これらは「局所的な線形写像」によって連動しており、無関係というわけではない。

で拡大すると、 Φ はほとんど線形写像に見えるはずである。(微分積分の基礎のキソ, 2.2.) すなわち、ある 8×8 行列 $J = (J_{ij})_{1 \leq i, j \leq 8}$ が存在して $x \rightarrow p$ のとき

$$y - q = J(x - p) + o(\|x - p\|)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} y_1 - q_1 \\ \vdots \\ y_8 - q_8 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} J_{11} & \cdots & J_{18} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{81} & \cdots & J_{88} \end{pmatrix}}_{\text{線形写像}} \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_8 - p_8 \end{pmatrix} + \frac{o(\|x - p\|)}{\text{誤差ベクトル}}$$

と書ける。ただし、各 i ($1 \leq i \leq 8$) について

$$y_i - q_i = J_{i1}(x_1 - p_1) + \cdots + J_{i8}(x_8 - p_8) + o(\|x - p\|)$$

は 1 次近似になっており、定数 J_{ij} ($1 \leq j \leq 8$) は次の偏微分

$$J_{ij} = \left. \frac{\partial y_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{p}} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\mathbf{p})$$

で与えられる ($\Phi = \psi \circ \phi^{-1}$ と \mathbf{p} のみに依存して決まり、 f には無関係の) 具体的な数値である。

このようにして与えられる行列 $J = (J_{ij})$ が Φ の \mathbf{p} における「微分係数」であり、 $D\Phi$ と表されるものであった。しかも、 Φ が同相写像であることから、 J は正則行列である。

勾配ベクトルの関係式。 再び、 $f(x) - f(p)$ の二つの表現を見比べてみよう。 x が p に十分近い場合、誤差項にあたる $o(\|x - p\|)$ や $o(\|y - q\|)$ の部分を無視すれば、「近似的な等式」

$$f(x) - f(y) \approx \mathbf{a} \cdot (x - p) \approx \mathbf{b} \cdot (y - q)$$

および

$$\mathbf{y} - \mathbf{q} \approx \mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{p})$$

が成立している。ここで一般に、内積 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ は行列として ${}^t\mathbf{u}\mathbf{v}$ (横ベクトル・縦ベクトルの積) として表現できるので、

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{J}^{-1}\mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{p})) \quad \leftarrow \text{内積} \\ &= {}^t\mathbf{a}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \quad \leftarrow \text{行列としての積} \\ &\approx ({}^t\mathbf{J}^{-1}\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{q}) \quad \leftarrow \text{内積} \\ &\approx \mathbf{b} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{q}) \end{aligned}$$

が成立している。最後の部分から、勾配ベクトルの間には関係式 $\mathbf{b} = {}^t\mathbf{J}^{-1}\mathbf{a}$ が成り立つと考えられる。まとめると、多様体のある点における関数の変化の様子を異なる二つのページで1次近似した場合、その微小変化量と勾配ベクトルの間には

$$\mathbf{y} - \mathbf{q} \approx \mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \quad \text{かつ} \quad \mathbf{a} = {}^t\mathbf{J}\mathbf{b}$$

が成立しているわけである。地図帳の異なるページ ϕ と ψ は、対応する点 \mathbf{p} から点 \mathbf{q} への「微分係数」 $\mathbf{J} = D(\psi \circ \phi^{-1})(\mathbf{p})$ を解して、この関係式によって常に連動しあっている。これが、われわれが意識しているページ間の「相関」を数学的に表現したものだといえる。

もう少し厳密な証明。 上の議論は誤差項を無視した大雑把な議論だったので、あらためて主張を述べつつ、厳密に証明を与えておこう。

定理 (勾配ベクトルの関係式) : M を C^1 級多様体とし、 C^1 級関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。 $p \in U_\phi \cap U_\psi$ を満たす地図帳の異なる局所座標 $\mathbf{x} = \phi(x)$ と $\mathbf{y} = \psi(x)$ にたいし、 $\mathbf{p} = \phi(p)$ と $\mathbf{q} = \psi(p)$ とおくと

$$f(x) - f(p) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|) \quad (\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p})$$

$$f(x) - f(p) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{q}) + o(\|\mathbf{y} - \mathbf{q}\|) \quad (\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{q})$$

が成立するようなベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} の間には、関係式

$$\mathbf{a} = {}^t\mathbf{J}\mathbf{b} \iff \mathbf{b} = {}^t\mathbf{J}^{-1}\mathbf{a}$$

が成り立つ。ただし $\mathbf{J} = D(\psi \circ \phi^{-1})(\mathbf{p})$ である。

注意. $\mathbf{p} = \phi(p)$ のまわりで $F_\phi = f \circ \phi^{-1}$ が C^1 級関数であれば、勾配ベクトル \mathbf{a} は \mathbf{p} に応じて連続に変化する。一方、 C^1 級多様体の定義から、 $\mathbf{J} = D(\psi \circ \phi^{-1})(\mathbf{p})$ も \mathbf{p} に応じて連続に変化する。関係式 $\mathbf{a} = {}^t\mathbf{J}\mathbf{b}$ より、 $\mathbf{q} = \psi(p)$ のまわりで勾配ベクトル \mathbf{b} も \mathbf{q} に応じて連続に変化することがわかる。これは「 M が C^1 級多様体であるとき、 F_ϕ が C^1 級ならば $F_\psi = f \circ \psi^{-1}$ も C^1 級」という地図帳の「整合性」を説明している。

証明. まず, $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}$ のとき $\mathbf{y} - \mathbf{q} = \mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)$ より, $\|\mathbf{y} - \mathbf{q}\| = O(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)$ を導こう. $\mathbf{y} - \mathbf{q} = \mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{p})$ の場合を示せば十分である.¹⁸ $\mathbf{J} = (J_{ij})_{1 \leq i, j \leq 8}$ とし, $K = \max_{1 \leq i, j \leq 8} |J_{ij}|$ とする. このとき, 三角不等式より

$$|y_i - q_i| = \left| \sum_{1 \leq j \leq 8} J_{ij}(x_j - a_j) \right| \leq 8K \max_{1 \leq j \leq 8} |x_j - a_j| \leq 8K \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$$

が成立する. 従って, $\|\mathbf{y} - \mathbf{q}\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq 8} |y_i - q_i|^2} \leq \sqrt{8} \cdot 8M \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ を得る. よって $\|\mathbf{y} - \mathbf{q}\| = O(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)$ である. とくに与えられた $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})$ の式の誤差項について, $o(\|\mathbf{y} - \mathbf{q}\|) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)$ が結論できる. したがって,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) &= F_\psi(\mathbf{y}) - F_\psi(\mathbf{q}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{q}) + o(\|\mathbf{y} - \mathbf{q}\|) \\ &= \mathbf{b} \cdot \{\mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)\} + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|) \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|) \end{aligned}$$

を得る. 上の大雑把な計算と同様にすれば,

$$\begin{aligned} F_\psi(\mathbf{y}) - F_\psi(\mathbf{q}) &= \underbrace{{}^t \mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{p})}_{\text{行列として}} + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|) \\ &= \underbrace{{}^t(\mathbf{J}\mathbf{b})(\mathbf{x} - \mathbf{p})}_{\text{行列として}} + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|) \\ &= \underbrace{({}^t \mathbf{J}\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})}_{\text{内積として}} + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|) \end{aligned}$$

となる. これが $F_\phi(\mathbf{x}) - F_\phi(\mathbf{p}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)$ と一致するので,

$$(\mathbf{a} - {}^t \mathbf{J}\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)$$

を得る. さらに $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}$ となる場合を考えて, 両辺が0に近づくスピードの違いから, $\mathbf{a} - {}^t \mathbf{J}\mathbf{b} = \mathbf{0}$ すなわち $\mathbf{a} = {}^t \mathbf{J}\mathbf{b}$ であることを結論しよう.

$\mathbf{a} - {}^t \mathbf{J}\mathbf{b}$ を $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_8)$ と表し, $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \epsilon \mathbf{e}_i$ (ただし \mathbf{e}_i は i 番目の成分が1であると0) かつ $\epsilon \rightarrow 0$ である場合を考えると, $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = c_i \epsilon$ かつ $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|) = o(\epsilon)$ である. これより $c_i = o(1)$ であるが, ベクトル $\mathbf{a} - {}^t \mathbf{J}\mathbf{b} = \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_8)$ 自体は定数のベクトルなので, $c_i = 0$ でなくてはならない. よって $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. ■

まとめ. 地図帳のふたつのページ ϕ と ψ に重なり合う部分があるとき, すなわち $U_\phi \cap U_\psi \neq \emptyset$ であるとき, これらのページに表現された関数の変化の様子は同相写像 $\Phi = \psi \circ \phi^{-1}$ の「微分係数」 $\mathbf{J} = D\Phi$ によって互いに連動している. 気圧や温度分布のように, 多様体上の関数が刻一刻と変化しても, 各ページでの表現を連動させるしくみ自体は変化しない. このしくみ自体は, 多様体の地図帳のなかに組み込まれているのである.

このように関数が動的に変化するような場合は, 「地図帳」よりも「マルチモニター」のように, 互いに連動した電子的な画面のほうがイメージに合っているかもしれない.

¹⁸たとえば \mathbf{x} が十分 \mathbf{p} に近いとき, $|o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|/100$ としてよい.