第3章　位相空間の基礎のキソ

多様体はある種の「位相空間」として定義される．[1] その定義に先立って，この章では「位相空間」とは何か，という（大学２，３年生レベルの）難題にヒントを与えたい．ただし，以下で述べるような抽象的な位相空間として多様体を認識することは以後ほとんどないので，すでに位相空間というものに自分なりのイメージをもっている人は，読み飛ばして時間を節約したほうがよいだろう．

3.1　集合から位相空間へ

「位相空間」とは何か？ここではその定義を与え，その意味を明解にしたい．われわれは，ある特定の集合を習慣的に「空間」と呼ぶが，いったい，数学における「空間」とは何なのだろうか．

そもそも,「集合」とは何だったか.　一般に**集合** (set) とは,「ものの集まり」と素朴に表現される数学的対象である．ただし，与えられた「もの」（たとえば x）がその「集合」（たとえば X）に所属しているかは，ある普遍的な条件によって判定されなくてはならない．普遍的な条件というのは，判定者に依存しない客観的な条件である．もしあなたが $x \in X$ と判定したならば，いつ，どこで,（宇宙人や人工頭脳もふくむ）誰であろうが，同じく $x \in X$ と判定されなくてはならない．[2]．

しかし集合は，単なる「集まり」である．元が整数のように並んでいる必要もないし，実数のように大小関係がつけられている必要もない．われわれの関心は，集合の中の「もの」たちがどのようにたたずんでいるのか，といったことにまで到達していないのである．

「空間」とは.　では，どのような集合が「空間」と呼ぶにふさわしいものなのか?**空間** (space) という言葉を思い返してみると,「ベクトル空間」,「条件○○をみたす関数の空間」，ときには人の名前を冠して「Hilbert 空間」,「Teichmüller 空間」などなど．一般に,「空間」という言葉それ自体は，ほとんど「集合」という言葉のシノニム（同義語）である．しかし，数学者は「空間」という言葉に特別の重みを意識している．「ものの集まり」であるだけではなく,『全体でなにか構造をもった「ものの集まり」』を特別に「空間」と呼ぶのである．

たとえば，線形代数では「ベクトル空間」という言葉がある．たとえば，2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ は典型的なベクトル空間の例であった．しかしその実体は,「ベクトル（＝実数を

[1] そもそも多様体の解説をするのに，抽象的な位相空間の定義は必要だろうか．多様体は，局所的にユークリッド空間と「みなせる」集合である．この「みなせる」を数学では「同相写像が存在する」と言い換えるのだが，これがもういけない．同相というのは「同位相」のことであり，位相という概念が使われているのである．

[2] その条件が実際に判定可能か，というのは論理学上の問題である．

ふたつ並べて書いたもの)」という「もの」の集まりであり,「ベクトル（の）集合」と言っても間違いではない．しかしベクトルたちの間には，たとえば

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}\\2/\sqrt{3}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

といった類の等式（関係式）たちが無数に成立しているのであった．

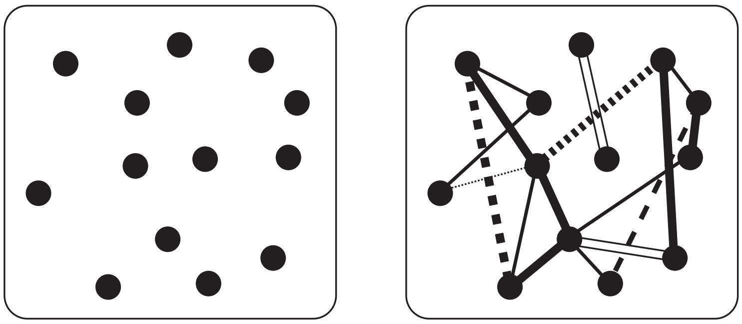

図 3.1: 集合から空間へ

このような和と定数倍による関係式の織り成すネットワークを意識するとき，われわれはベクトル全体の集合をひとつの構造体（システム）と捕らえているのである．すなわち，われわれはベクトルの集合を『「構造」をもった「ものの集まり」』として認識し，ベクトルの空間，すなわち「ベクトル空間」と呼ぶ．

では,「位相空間」とは何か． それは,「位相」という構造が組み込まれた集合である．次節では，集合における**位相** (topology) とは何か，それはいかなる構造なのか，という問いを解決しよう．

3.2 位相とはなにか？

志賀浩二著『位相への 30 講』を見てみると,「位相とは，近さの感覚を背景にして展開するような，かなり広い数学の対象を指し示すときにもちいられる熟語である」とある．個人的な意見だけども，この一文は「位相」という語を「距離」という言葉に置き換えれば正しいと思っている．[3]

その立場を明解に示すために，以下ではあえてトップダウン式に，一番抽象的な位相の定義から初めて，具体的な例へと話をすすめてみよう.（多くの書籍では，ユークリッド空間からスタートするボトムアップ式である.）

[3]実際，志賀はこの本の大半を距離空間，すなわち集合内の 2 つの元に距離が定まるような空間の解説に費やしている．著者の想定する読者はおそらく大学生であり，しかも大学で扱う数学的対象のほとんどは距離空間であるから，このような判断はもっともである．

3.2.1 位相空間の定義

数学では，集合の位相を極めて抽象的にしか定義しない．多くの人が，次のもっとも一般的な，開集合系による位相の定義を目の当たりにして，当惑してしまうのではなかろうか：

> **定義（開集合系・位相・位相空間）：** 集合 S にたいし，部分集合の族（あつまり）$\mathcal{O}$ が S の**開集合系**であるとは，次の条件 (O1)-(O3) を満たすときをいう：
>
> (O1) $S \in \mathcal{O}$ かつ $\emptyset \in \mathcal{O}$
>
> (O2) $m \in \mathbb{N},\ \ O_1, \ldots, O_m \in \mathcal{O} \implies O_1 \cap \cdots \cap O_m \in \mathcal{O}$
>
> (O3) 任意の集合 Λ にたいし，各元 $\lambda \in \Lambda$ から $\mathcal{O}$ の元 $O_\lambda \in \mathcal{O}$ への対応を与えたとき，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$
>
> 集合 S に開集合系 $\mathcal{O}$ が与えられているとき，「$\mathcal{O}$ は S に位相（構造）を定める」もしくは「S には $\mathcal{O}$ による位相（構造）が入る」といい，$\mathcal{O}$ の元を**開集合** (open set) とよぶ．このような位相構造が定められた集合 S を**位相空間** (topological space) という．

S をただの集合ではなく位相空間とみなした場合，S の元は**点** (point) とも呼ばれる．

また，より正確には，S 単体ではなく，$(S, \mathcal{O})$ というペアを位相空間と呼ぶべきなのだが，ひとつの集合にはひとつの位相を固定して考えることが多いので，開集合の全体 $\mathcal{O}$ はわざわざ明記しない．

条件 (O1)-(O3) へのこまかい講釈はあとにして，とりあえず (O3) で出てくる Λ（**添え字集合** (index set) とよばれる）の具体例を挙げておこう．

たとえば，各整数 $n \in \mathbb{Z}$ にたいし，$\mathbb{R}^2$ 上の $(n, 0)$ 中心半径 1 の（開）円板を

$$B_n \ := \ \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-n)^2 + y^2 < 1\right\}$$

とおく．このとき，無限個の和集合

$$\cdots \cup B_{-2} \cup B_{-1} \cup B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \cdots$$

を $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_n$ と表すのであった．この場合の添え字集合は $\Lambda = \mathbb{Z}$ であり，添え字として $\lambda = n$ を用いている．また，各実数 $a \in \mathbb{R}$ にたいし，

$$B_a \ := \ \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-a)^2 + y^2 < 1\right\}$$

と置く．このような B_a 全体の和集合を考える場合は，上のように悠長に $\cdots \cup B_0 \cup B_1 \cup \cdots$ などとは書いていられない．この場合は $\bigcup_{a \in \mathbb{R}} B_a$ と表さざるを得ず，添え字集合は $\Lambda = \mathbb{R}$ となる．

「近さ」の感覚は得られたか？ さて，この定義をひと目見ただけで，その意味するところをクリアに見通せる人などいないのでなかろうか．たしかに位相というものは定義されたよう

だが，集合論の記号が出てきただけで，「近い」とか「遠い」とかいう表現は一切出てこない．何らかの，直感を超えた解釈が強いられている．

ただし，ひとつだけ重要な事実がある．あとで具体例として述べるユークリッド空間における開集合全体（もしくは一般の距離空間における開集合全体）は，上の性質をみたしているのである．

そのそも，われわれが「空間」として最初にイメージするのは，われわれの住む 3 次元的空間であり，それを数学的に表現するものがユークリッド空間であった．一般に「位相空間」を定義する際にも，何らかの形で「ユークリッド空間的」性質（構造）が投影されているはずである．[4]

3.2.2 「開集合系」の直感的解釈

ユークリッド空間における開集合全体の満たす性質を一般化した，たったそれだけで，集合にどんな構造が入るのだろうか？それは，われわれに「近さ」という感覚をもたらすのか？

上の定義で，集合 S に与えられた「位相」とは何か．それは「近さ」という感覚よりも，もっと漠としたある感覚を定式化したものだと考えられる．その感覚とは，「グループ分け」の感覚である．

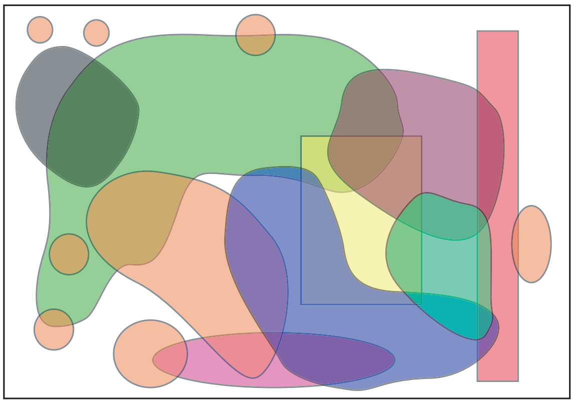

図 3.2: グループ分けのイメージ

国のグループ分け． 開集合系を「グループ分け」となぞらえながら解釈してみよう．

地球上には，国という組織の単位がある．われわれは国の集まりとして，たとえば「アジア」,「北米」,「ヨーロッパ」といった大きなグループ分けを行う．また，「キリスト教国家」「イスラム国家」といったグループ分けもするし，さらには「英語圏」「スペイン語圏」など，さまざまなカテゴリーでグループわけを行っている．

中でも，アメリカとカナダ．これらはさまざまな共通点を持っている．ともに北米の合衆国であり，移民の国であり，英語が概ね通用し，おなじドルという名の通貨を用いる．共通

[4] 人間はそのように「ユークリッド空間を真似る」ことでしか，「空間」の概念を観念的に構成できないのかもしれない．

点が多いということは,「さまざまなカテゴリーにおいて共通のグループに入ることが多い」ということであり，それをもってわれわれは

『アメリカにとって，カナダのほうがロシアより近い』

といった漠然とした感覚を抱く．だが，たとえば軍事大国である，核保有国である，といった要素をもって，

『アメリカにとって，ロシアのほうがカナダより近い』

といった感覚もウソではない．

ふたつの文章が矛盾してしまうのは,「近い」「遠い」といった言葉が本来相対的な（＝比較する対象があって初めて意味をなす）概念だからである.「近い」「遠い」という言葉を矛盾なく使おうと思えば，なにか基準となる「近さ」の単位を定め，絶対的な基準（単位系）によって「近さ」が比較されなければならない．これはちょうど，あとで述べる「距離空間」とよばれる位相空間が実現している性質である．しかし，国同士の「距離」を無理に定義し数値化しても，現実世界における（もしくは，われわれの脳内における）複雑な分類体系を再現できるとは到底思えない．

グループ分け． では，集合 S の位相の話に戻ろう．上で与えた開集合系による位相の定義では，そのような絶対的な「近さ」の単位設定を放棄する．われわれは単に，さまざまなカテゴリーによるグループ分けのみを指定するのである．開集合系に属するそれぞれの開集合は,「アジア」「英語圏」「イスラム国家」といったグループに対応する．もちろん，そこには $\{$バチカン市国$\}$ といったひとつだけの要素からなるグループもあるかもしれない．まずはとにかく，考えうるあらゆるグループを考え，列挙してみればよい．

そうしてできたグループの集まり（族）を「開集合系」と呼ぶのは，以下の条件 (O1)-(O3) が満たされたときである：そのグループの集まりを $\mathcal{O}$ と名づけると，

(O1) もとの集合 S 自体も 1 つの $\mathcal{O}$ に属するグループである．また，空集合 $\emptyset$ も $\mathcal{O}$ に属するグループとみなす．

これは (O2) と (O3) に付随する便宜的な条件で，あまり本質的でない．

(O2) $\mathcal{O}$ に属する**有限個の**グループにたいし，それらの共通部分はやはり $\mathcal{O}$ に属するグループである．

たとえば,「北米」と「国連常任理事国」の共通部分として, $\{$アメリカ$\}$ というひとつの元からなる集合もグループに入っていなければならない．また,「北米」と「アジア」には共通部分がないから，空集合もグループのひとつである．これは (O1) に述べられている．

(O3) $\mathcal{O}$ に属するグループの有限個もしくは無限個の和集合は，やはり $\mathcal{O}$ に属するグループである．

たとえば,「中米」と「南米」を合わせた「中南米」も $\mathcal{O}$ に属するグループに入っていなければならないし，さらに「北米」を合わせた「南北アメリカ大陸の国々」も $\mathcal{O}$ に属するグループである.「北半球の国々」と「南半球の国々」をあわせて,「全世界の国々」も $\mathcal{O}$ に属するグループに入れておくべきだろう．これも (O1) でいう，$S \in \mathcal{O}$ に対応する.

もとの定義では,「グループ」という具体性のある言葉が，形式的に「開集合」という言葉に置き換えられていることに注意しておこう.

ネットワークと構造. 国とそのグループ分けを考えるわれわれの脳は，個々の国々をどこか「脳内の引き出し」に置いているのかもしれない．ニューロンのネットワークは，それぞれの「引き出し」を「タンス」としてグループ化し，さらに「タンス」間を連絡する．こうしてできた大きな構造物がわれわれの脳,「記憶の倉庫」である．漠然とはしているが，脳は明らかに，グループ分けという形で情報を整理整頓しているに違いない.

集合に位相（構造）を入れる，という操作も，脳の内部における情報の構造化過程に準じているのではなかろうか．集合に開集合系という部分集合（＝グループわけ）の族を指定することで，われわれは集合の元をばらばらに扱うのではなく,「脳内のタンスたち」と同じしくみで，漠然とではあるが，整理整頓することができるようになる．これらのグループたちの間には,（ベクトル空間でそうであったように）

$$
\begin{aligned}
\text{「中米」} \cup \text{「南米」} &= \text{「中南米」} \\
\text{「北米」} \cap \text{「国連常任理事国」} &= \text{「アメリカ」}
\end{aligned}
$$

といった無数の関係式がネットワークをなし，集合に構造物としての性質をあたえるのである.

練習問題１. ３つの元からなる集合 $S = \{\text{英, 仏, 米}\}$ にたいし，以下のように部分集合の族 $\mathcal{O}$ を定める．このとき，$(S, \mathcal{O})$ が位相空間となるものはどれか？

1. $\mathcal{O} = \{\emptyset,\ \{\text{英, 仏}\},\ \{\text{仏, 米}\},\ S\}$
2. $\mathcal{O} = \{\emptyset,\ \{\text{英}\},\ \{\text{仏}\},\ \{\text{米}\},\ S\}$
3. $\mathcal{O} = \{\emptyset,\ \{\text{米}\},\ \{\text{英, 米}\},\ \{\text{米, 仏}\},\ S\}$

練習問題２. ５つの元からなる集合 $S = \{\text{英, 仏, 独, 伊, 西}\}$ にたいし，

$$\mathcal{O} := \{\emptyset,\ \{\text{英}\},\ \{\text{仏}\},\ \{\text{英, 仏}\},\ \{\text{仏, 独}\},\ \{\text{英, 仏, 独}\},\ S\}$$

とすると $(S, \mathcal{O})$ は位相空間となることを確かめよ.

3.3 条件 (O1)-(O3) の正当化：ユークリッド空間の一般化として

ではなぜ，(O1)-(O3) のような３条件が必要なのか．それは，人間が最も扱いなれた，ユークリッド空間の開集合全体がこれら３条件を満たすからである．たとえば，(O2) では**有限**

個のグループに関して共通部分をとっているが，(O3) では有限個だけでなく，無限個の和集合も許している．このような一見非合理にみえる条件も，一旦ユークリッド空間の開集合系を眺めることで，自然に見えてくる．

3.3.1 位相空間としてのユークリッド空間：具体例として

開集合の定義.

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における開集合の定義を思い出しておこう．ふたつの元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ にたいし，$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$ をそのユークリッド距離とする（1 章参照）．また正の実数 r にたいし，集合

$$B(\boldsymbol{p}, r) \;:=\; \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) < r\}$$

を $\boldsymbol{p}$ 中心半径 r の**開球** (open ball) と呼ぶ．

> **定義（開集合・開集合系）**部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の**開集合** (open set) であるとは，任意の $\boldsymbol{p} \in A$ にたいし,『$(*)$ ある十分に小さな $r > 0$ をとれば,
>
> $$B(\boldsymbol{p}, r) \subset A$$
>
> とできる』ときを言う．
>
> また，$\mathbb{R}^n$ の開集合全体を集めたものを，$\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ で表し，$\mathbb{R}^n$ の**開集合系**と呼ぶ．

一般に $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A について，$(*)$ を満たすような $\boldsymbol{p} \in A$ を A の**内点** (interior point) と呼ぶ．したがって，A が開集合であるとは,「すべての点が内点となる集合」だと言える．

また，すこし形式的な感じがするが，空集合 $\emptyset \subset \mathbb{R}^n$ も開集合と呼ぶことにして，$\emptyset \in \mathcal{O}$ とする．

では，$S = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ とおいて，これらが位相空間の条件 (O1)-(O3) を満たしていることを確認していこう．

> **命題 3.3.1** ペア $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}(\mathbb{R}^n))$ は位相空間である．

証明. **(O1)：** 明らかに $S = \mathbb{R}^n$ は開集合の条件を満たしている．また，空集合は開集合とみなすのであった．

(O2)： **有限個**の開集合 $O_1, \ldots, O_m \in \mathcal{O}$ を選び，$O = O_1 \cap \cdots \cap O_m$ としよう．もし O が空集合であれば (O1) より $O \in \mathcal{O}$ であるから，$O \neq \emptyset$ としよう．各元 $\boldsymbol{p} \in O$ にたいし，$\boldsymbol{p} \in O_j$ $(1 \leq j \leq m)$ より，適当な $r_j > 0$ を選べば $B(\boldsymbol{p}, r_j) \subset O_j$ が成立している．$r_1, \cdots, r_m$ の中には最小値があるから，それを r とすると $B(\boldsymbol{p}, r) \subset O_j$ が全ての j で成り立つ．よって $B(\boldsymbol{p}, r) \subset O$．すなわち，$O$ は開集合であり，$O \in \mathcal{O}$.

ここで，**有限個**の開集合という条件ははずせない．たとえば，$\mathbb{R}^2$ における無限個の開円板

$$B_n := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1/n\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

の共通部分を考えてみるとよい．それは原点ただ一点であり，開集合とはならないのである．

(O3)： 有限集合でも無限集合でもよいので集合 Λ を選び，各 $\lambda \in \Lambda$ にたいし開集合 O_λ を割り当てよう．和集合 $O = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ が空でなければ，この集合は

$$\boldsymbol{p} \in O \iff \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ が存在して，} \boldsymbol{p} \in O_\lambda$$

と特徴づけられる．$\boldsymbol{p} \in O_\lambda$ であれば $B(\boldsymbol{p}, r) \subset O_\lambda$ を満たす $r > 0$ が存在するから，$B(\boldsymbol{p}, r) \subset O_\lambda \subset O$，すなわち O は開集合である． ■

位相空間はあくまで，数学の母体ともいえるユークリッド空間を拡張したものでなくてはならない．そこで，ユークリッド空間の開集合全体がもつ，集合論的性質を最低限にピックアップした．これが上の条件 (O1)-(O3) だと考えられる．

3.3.2 具体例その２：距離空間

ユークリッド空間にはユークリッド距離という「距離」の計測方法が定められていて，「近さ」という言葉は厳密に数値化されるのであった．われわれは空間内での「距離感」を得て，絵に描けない $\mathbb{R}^4$ ですら，(そこそこ）イメージできるようになる．

ユークリッド空間のこの性質だけをピックアップしたのが，次の「距離空間」である．

定義（距離空間） 集合 S およびその任意の元 $x,\ y \in S$ にたいし，0 以上の実数 $d(x, y)$ が定まり，次を満たすとする：

(MS1) $d(x, y) = d(y, x)$

(MS2) $d(x, y) = 0 \iff x = y.$

(MS3) **三角不等式：** 任意の $z \in S$ にたいし，$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

このとき，関数 $d : S \times S \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$ を S 上の**距離** (metric, distance) という．集合 S に距離 d が定義されているとき，そのペア (S, d) を**距離空間** (metric space) とよぶ．

距離空間の例 1． たとえば，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ とユークリッド距離 d のペアは距離空間である．むしろ，ユークリッド距離の持つ性質のなかで，もっとも大事な部分を取り出したのが上の (MS1)-(MS3) である．(MS1) は距離が対称な関数であることを要求し，(MS2) は距離が異なる点を区別できる関数であることを要求し，(MS3) は「遠回り」すると移動距離が伸びることを要求している．

$\mathbb{R}^n$ に定まる距離はユークリッド距離だけではない．$\mathbb{R}^n$ の元 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ にたいし，

$$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

と定める．このとき，d_∞ は (MS1)-(MS3) をみたす距離であり，ペア $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ は距離空間である．

距離空間の例 2. $\mathbb{I} = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ とし，その上の連続関数全体を $C^0(\mathbb{I})$ で表す．$f, g \in C^0(\mathbb{I})$ にたいし

$$d_\infty(f, g) = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$$

と定めると，ペア $(C^0(\mathbb{I}), d_\infty)$ も距離空間となる．

距離空間の例 3. ベクトル空間 V に内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が定まっているとき，関数

$$d : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle \geq 0$$

は V の距離を定めている．

距離空間の位相. さて，距離空間 (S, d) にも自然な位相が入ることを確認しよう．$p \in S$ および 正の実数 r にたいし，集合

$$B(p, r) := \{x \in S : d(x, p) < r\}$$

を p 中心半径 r の**開球** (open ball) と呼ぶ．これは「デジャ・ビュ」である．ユークリッド空間のときと，そっくりそのまま同じ定義をしている．開集合の定義へと移ろう．

> **定義（距離空間の開集合・開集合系）** 部分集合 $A \subset S$ が距離空間 (S, d) の**開集合** (open set) であるとは，任意の $p \in A$ にたいし,『$(**)$ ある十分に小さな $r > 0$ をとれば,
>
> $$B(p, r) \subset A$$
>
> とできる』ときを言う．また，(S, d) の開集合全体を集めたものを，$\mathcal{O}(S, d)$ で表し，(S, d) の**開集合系**と呼ぶ．

また，若干形式的だが $\emptyset \in \mathcal{O}$ とする．このとき，

> **命題 3.3.2** 距離空間 (S, d) は上の開集合系によって位相空間となる．

証明. 位相空間の条件 (O1)-(O3) を満たしていることを確認すればよい．しかしこれは $\mathbb{R}^n$ の場合とまったく同様であるから，練習問題としよう． ■

距離空間のすばらしいところは，ユークリッド空間の「距離感」をそっくりそのまま適用できるところにある．

後の章でみるように，多様体も多くの場合距離空間とみなすことができる．いわゆる,「微分幾何学」はそのような枠組みで展開される多様体論である．一方で，多様体の距離空間としての構造には着目せずに展開される「位相幾何学（トポロジー）」といった分野があることも忘れてはならない．要・不要を決めるのは，つねにわれわれ自身であることを心に留めておこう．

練習問題. 距離空間 $(\mathbb{R}^n, d)$ の開集合 O は，距離空間 $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ の開集合でもあることを示せ．また，逆も成り立つことを示せ．

3.4 閉包，閉集合，境界

集合に「開集合」が定義されると，続けて閉集合，境界，などが定義できる．形式的には，以下のように定義する：

定義（閉集合など）$(S, \mathcal{O})$ を位相空間とする．A を S の部分とするとき，

- A が**閉集合** (closed set) であるとは，その補集合が開集合となるときをいう．すなわち，$S - A \in \mathcal{O}$.
- A の**内部** (interior) とは，A に含まれる開集合全体の和集合のことをいい，A° と表す．A° に含まれる点を，A の**内点** (interior point) とよぶ.
- A の**閉包** (closure) とは，A を含む閉集合全体の共通部分のことをいい，$\overline{A}$ と表す.
- A の**境界** (boundary) とは，A の閉包から A の内部を除いたものを言い，∂A で表す．すなわち，$\partial A := \overline{A} - A^\circ$.

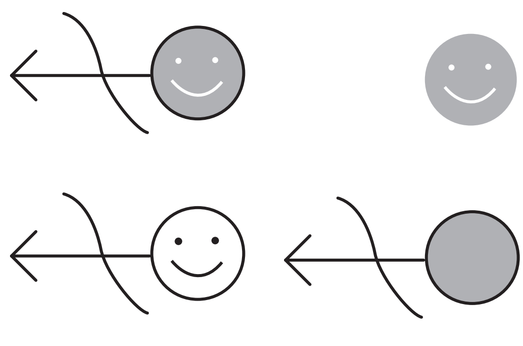

図 3.3: 内部・境界・閉包のイメージ図．左上を $A \subset \mathbb{C}$（グレーの部分は含むが，白い 2 点と弧は含まれない）とすると，右上が内部 A°，左下が境界 ∂A，右下が閉包 $\overline{A}$.

これらはあくまでも，ユークリッド空間をモデルに定義された概念である．ただし多様体を解析する上では，図 3.3 のような，ユークリッド空間における状況を直感的に理解していれば十分である．

練習問題. A を位相空間 S の部分集合とするとき，以下を示せ：

(1) $\partial A \cap A^\circ = \emptyset$ かつ $\partial A \cup A^\circ = \overline{A}$.

(2) A が閉集合 $\iff A = \overline{A}$

(3) A が開集合 $\iff A = A^\circ$

(4) S が距離空間であるとき，$z \in \partial A$ であることと，z 中心の任意の開球に A および $S - A$ の元が含まれることは同値である.

練習問題. 上で与えられた集合 $S = \{$英, 仏, 独, 伊, 西$\}$ とその開集合系 $\mathcal{O}$ からなる位相空間 $(S, \mathcal{O})$ を考える．今，S の部分集合 $A = \{$英, 仏, 伊$\}$ にたいし，その内部 A°，閉包 $\overline{A}$，境界 ∂A を求めよ.

3.5 連続写像と同相写像

一般的な位相空間において,「連続写像」はどのように定式化されるのであろうか？
最初に，定義だけ見ておこう：

定義 0（連続写像）: ふたつ位相空間 $(S, \mathcal{O})$, $(S', \mathcal{O}')$ の間の写像 $f : S \to S'$ が**連続** (continuous) であるとは，任意の S' の開集合の逆像がまた S の開集合となることをいう. すなわち，

$$O' \in \mathcal{O}' \implies f^{-1}(O') \in \mathcal{O}$$

である.

この定義はかなり曲者だろう．[5] たとえば，関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の連続性は，各点ごとの近傍において点列の収束やら ϵ-δ やらを使い定義されていた．すなわち，ユークリッド空間における連続性とは局所的な概念であり，局所的な定義で事足りたのである．開集合などという（どこか大域的なテイストをもつ）言葉は一切必要なかった.

数学者が上のような定義に到達した背景はよくわからないが，次のように順を追って考えると納得できるかもしれない.

3.5.1 距離空間における連続写像

1 次元関数の連続性. まず，もっとも素朴な 1 次元関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について連続性をおさらいしておこう．一般的なのは，つぎの ϵ-δ を用いる定義である：

[5] ちなみに，$f^{-1}(O') := \{x \in S : f(x) \in O'\}$ である．念のため.

> 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が点 $p\in\mathbb{R}$ で**連続**であるとは，任意に小さい $\epsilon>0$ にたいしある $\delta>0$ が存在して，$|x-p|<\delta$ のとき $|f(x)-f(p)|<\epsilon$ が成り立つときをいう．
> 任意の $p\in\mathbb{R}$ において f が連続であるとき，単に f は連続であるという．

まず局所的に（各点において）連続性を定義して，それから全体の連続性を定義していることに注意しよう．

距離空間における連続性． これを踏まえて，連続性の定義を距離空間に拡張してみよう．(S,d) および (S',d') を距離空間とする．また，(S,d) における $p\in S$ 中心半径 r の開球を $B(p,r)$ で表し，(S',d') における $q\in S'$ 中心半径 s の開球を $B'(q,s)$ で表すことにする．この記号の元で，

> **定義 1（連続写像）：** 写像 $f:(S,d)\to(S',d')$ が点 $p\in S$ で**連続**であるとは，任意に小さい $\epsilon>0$ にたいしある $\delta>0$ が存在して，$f(B(p,\delta))\subset B'(f(p),\epsilon)$ が成り立つときをいう．
> また，任意の $p\in S$ において f が連続であるとき，単に f は連続であるという．

$\mathbb{R}$ の距離を $d(x,y)=d'(x,y)=|x-y|$ と定め距離空間とみなせば，定義 1 は ϵ-δ 式の連続性の定義そのものである．

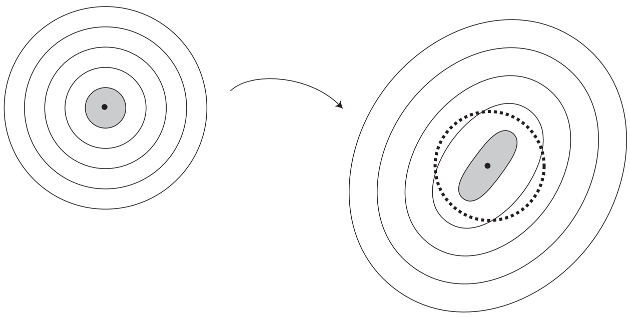

図 3.4: 距離空間における連続性のイメージ図．右の点線で囲まれた開球 $B'(f(p),\epsilon)$ を定めると（どんなに小さくてもよい），像がそこに入るような開球 $B(p,\delta)$ （灰色）を左で見つけることができる．

3.5.2 一般の位相空間における連続性

定義 1 を一般の位相空間に拡張してみよう．
$(S,\mathcal{O})$ および $(S',\mathcal{O}')$ を位相空間とする．もちろん，$\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ はそれぞれの開集合系である．

> **定義 2（連続写像）：** 写像 $f:(S,\mathcal{O})\to(S',\mathcal{O}')$ が点 $p\in S$ で**連続**であるとは，$f(p)$ を含む 任意の開集合 $O'\in\mathcal{O}'$ にたいし，ある p を含む開集合 $O\in\mathcal{O}$ が存在して，$f(O)\subset O'$ が成り立つときをいう．
> また，任意の $p\in S$ において f が連続であるとき，単に f は連続であるという．

定義 1 と比べるために，定義 2 の下線部を「任意に小さな開集合」と読みかえてみよう．一般の抽象的な位相空間においては,「任意に小さな開集合（グループ）」という言葉が意味をなすとは限らないが，距離空間であれば半径が小さな開球に含まれる開集合として意味を成す．実際，次が成り立つ：

命題 3.5.1 $(S, \mathcal{O})$, $(S', \mathcal{O}')$ がそれぞれ距離空間 (S, d), (S', d') であるとき，定義 1 と定義 2 は同値である．

練習問題． 上の命題を証明せよ．

冒頭の定義へ． 定義 2 までが直感的に納得できる限界のように思える．あとは論理の力で，次の命題へと到達できる：

命題 3.5.2 写像 $f : (S, \mathcal{O}) \to (S', \mathcal{O}')$ にたいし，次は同値：

- 定義 0 の意味で，f は連続．すなわち，任意の $O \in \mathcal{O}'$ にたいし，$f^{-1}(O') \in \mathcal{O}$.
- 定義 2 の意味で f は連続．

証明． まず「定義 0 $\Longrightarrow$ 定義 2」を示す．任意に $p \in S$ をとり，$f(p) \in O'$ となる開集合 $O' \in \mathcal{O}'$ をとる．定義 0 より，$O := f^{-1}(O')$ は開集合，すなわち $\mathcal{O}$ の元である．このとき，あきらかに $p \in O$ かつ $f(O) \subset O'$（実際は等号）であるから，定義 2 の意味で f は連続である．

次に「定義 2 $\Longrightarrow$ 定義 0」を示す．[6] 任意の開集合 $O' \in \mathcal{O}'$ を固定しよう．$p \in f^{-1}(O')$ としよう．$f(p) \in O'$ および定義 2 より，ある開集合 $O_p \in \mathcal{O}$ が存在して，$f(O_p) \subset \mathcal{O}'$ とできる．そのすべてで和集合をとった

$$O \ := \ \bigcup_{p \in f^{-1}(O')} O_p$$

を考えよう．開集合系の定義 (O3) より，O も開集合，すなわち $\mathcal{O}$ の元である．さらに $p \in O_p$ および $p \in f^{-1}(O')$ より $f^{-1}(O') \subset O$ である．一方，

$$f(O) \ = \ \bigcup_{p \in f^{-1}(O')} f(O_p) \ \subset \ O'$$

であるから，$O \subset f^{-1}(O')$ である．したがって $O = f^{-1}(O') \in \mathcal{O}$ をえる．よって，f は定義 0 の意味で連続である． ■

[6] こちらのほうに局所から大域へ移行するための議論が含まれており，若干難しい．定義 0 をわかりづらくしている原因でもある．

3.5.3 同相写像

さて多様体の定義に必要であった,「同相写像」の概念を定義・解釈しておこう.

> **定義(同相写像)**: 二つの位相空間 $(S, \mathcal{O})$, $(S', \mathcal{O}')$ について,写像 $f : S \to S'$ が**同相写像** (homeomorphism, topological map) であるとは,次の条件を満たすときをいう:
>
> 1. 全単射であり,したがって $f^{-1} : S' \to S$ が写像として定まる.
> 2. f も f^{-1} も 連続である.
>
> 位相空間 $(S, \mathcal{O})$ が別の位相空間 $(S', \mathcal{O}')$ に**同相** (homeomorphic) であるとは,同相写像 $f : S \to S'$ が(ひとつ以上)存在するときをいう.

冒頭にも述べたが,ふたつの空間が同相であるというのは,ふたつの空間を「同じとみなせる」ということである.まず 1. により,ふたつの空間の各点には過不足のない対応が定まる.さらに,2. の f の連続性から

$$O' \in \mathcal{O}' \implies f^{-1}(O') \in \mathcal{O}$$

であり,f^{-1} の連続性より

$$O \in \mathcal{O} \implies f(O) \in \mathcal{O}'$$

である.$f(O) = O'$ とすれば,これは S の開集合と S' の開集合にも,過不足のない対応が与えられていることを意味する.しかも f は全単射であるから,開集合系の定義における (O1)-(O3) の性質は保存する.S の構造を,f という精巧なレンズを通して眺めたものが S' なのである.

開集合系,すなわちグループ分け全体の間にも完全な対応が与えられているのであるから,$(S, \mathcal{O})$ と $(S', \mathcal{O}')$ は位相空間という枠組みで解釈しつづける限り,「同じ空間を別の名前(記号)で表現している」とも考えられる.このすこし強引な同一視のもと,同相写像 f はその名前(記号)の変更だけを担っていることになる.

f のような同相写像の存在は,「ふたつの空間を同じとみなす」ひとつの基準となる.これが「同相」という概念である.

注意. 次章で多様体を定義するには,「相対位相」の概念が必要になる.位相空間 $(S, \mathcal{O})$ にたいし,部分集合 $U \subset S$ の**相対位相** (relative topology) とは,開集合系

$$\mathcal{O}_U := \{O \cap U : O \in \mathcal{O}\}$$

によって定まる U の位相のことである.実際,ペア $(U, \mathcal{O}_U)$ が位相空間となっていることを確かめるのは読者の練習問題としよう.

多様体は「局所的にユークリッド空間とみなせる空間」なので,その部分集合と $\mathbb{R}^n$ の部分集合を同相写像によって同一視する必要が生じるのである.

余談：写像とはなにか？

1. まず，**写像** (mapping) とはどういうものかについて，一般的な解釈を与えてみたい．写像 $f : X \to Y$ とは，f という投射機をもちいて，スクリーン X 上の情報を別のスクリーン Y へと投影する「しくみ」（＝機能＝ function）である．ただし，投射機 f には特殊なレンズが付属していて，それによって像は曲げられてしまう，さらに，投影の仕方には次のような恣意的な制限を設ける：

    a. 集合 X 上の 2 つ以上の元が Y の 1 つの元に写ることはあるが，

    b. 集合 X 上の 1 つの点が分離して，Y の 2 つ以上の元に写ってはならない[7]．

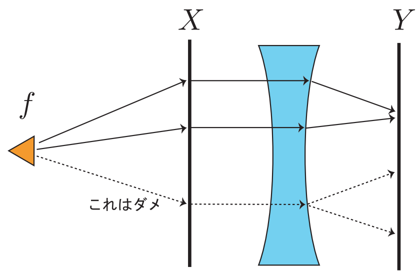

図 3.5: 写像のイメージ

2. 写像には，情報を間引く性質がある．それは，上でいうと a から導かれる性質である．たとえば，X を世の中の動物，全個体の集合とし，写像 $f : X \to Y = \mathbb{R}$ は各個体のある瞬間における質量（体重, kg）を与えるものとする．このとき，ある猫とある犬の体重はまったく同じ，5.0kg かもしれない．これは，Y の側に投影される過程で，猫であったとか，犬であったとかいう属性の情報が完全に失われてしまうことを意味する．

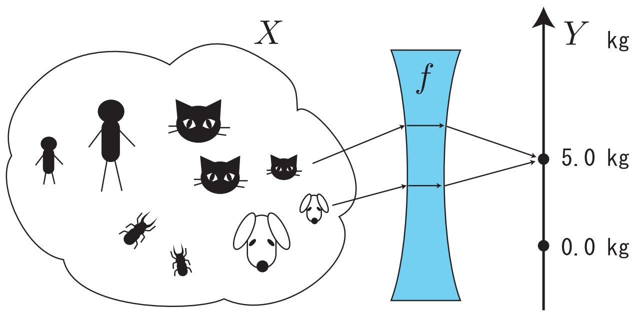

図 3.6: 体重だけでは，猫か犬かわからない．

3. われわれが見たり，感じたりできる情報（＝世界そのもの）というのは，身体への物理的刺激を脳が再構成したものにすぎない．その過程で，多くの情報が取捨選択され，失われていくことは明らかであろう．実際，われわれは紫外線を見ることはできないし，超高音域の音は聞こえない．物理的刺激も，情報という形では脳まで到達しないのである．（これら場合は身体というハードウェアの性質による情報の制限であるが，脳も一般に情報を取捨選択し記憶・処理しているように思われる．たとえば，有名な「カクテルパーティー効果」など．）

[7] このような分離を許す投影の「しくみ」は**対応** (correspondence) と呼ばれているが，対応を用いて数学を構築するのは現代の主流ではない．

4. 写像も同様で，X の側から必要な情報を取捨選択し（さらに必要に応じ変形して）Y に投影させる，という機能を果たしている．そこにはつねに，写像を定義する人間の意思が反映されていることを忘れてはならない．